

第 7 章 图论.....	4
7.1 图的基本概念.....	4
7.1.1 无向图与有向图.....	4
1) 经典问题与图模型.....	4
2) 图的集合论基础&.....	5
3) 无向图.....	5
4) 有向图.....	5
5) 图的典型类别.....	6
6) 图的关联关系与相邻关系.....	6
7.1.2 顶点度与握手引理.....	7
1) 无向图的顶点度.....	7
2) 有向图的顶点度.....	7
3) 握手定理.....	8
4) 图的度数序列.....	9
5) 图的度数列判定与应用.....	9
7.1.3 常见图类型.....	11
1) 多重图与简单图.....	11
2) 完全图与正则图.....	12
3) 环图与轮图.....	13
4) 超立方体图.....	13
7.1.4 子图与补图.....	14
1) 子图.....	14
2) 补图.....	15
7.1.5 图同构.....	15
1) 图同构的定义.....	15
2) 图同构的判定.....	15
7.2 图的连通性.....	17
7.2.1 通路与回路.....	17
1) 定义.....	17
2) 通路与回路的符号表示.....	18
7.2.2 无向图的连通性.....	18
1) 无向图的连通性与连通分支.....	18
1) 无向图顶点间的短程线与距离.....	19
3) 点割集、割点、边割集与割边(桥).....	19
4) 图的连通强度.....	20
5) 特殊图的点连通度与边连通度.....	21
6) 点连通度、边连通度与最小度的关系定理(Whitney 不等式).....	21
7.2.3 有向图的连通性与连通度.....	21
1) 有向图的连通性及其强弱等级.....	21

2) 有向图中顶点间的短程线与距离	22
3) 有向图的应用实例-业务过程建模	22
7.3 图的矩阵表示	24
7.3.1 无向图的关联矩阵	24
1) 无向伪图关联矩阵	24
2) 无向伪图关联矩阵性质	25
7.3.2 有向无环图的关联矩阵	26
1) 有向图关联矩阵	26
2) 有向图关联矩阵的性质	26
7.3.3 邻接矩阵	27
1) 有向图的邻接矩阵	27
2) 有向图通路计数定理	28
3) 无向图的邻接矩阵	29
4) 简单无向图的通路计数定理	30
5) 非无向简单图的邻接矩阵	30
7.3.4 可达矩阵	30
1) 可达矩阵的定义	30
2) 可达矩阵的性质	30
7.4 图的若干特殊类型	31
7.4.1 二部图	32
1) 无向二部图与完全二部图	32
2) 二部图的环特征	32
3) 判定二部图的充要条件	32
4) 二部图的匹配与完全匹配	33
5) 完备匹配存在定理	34
7.4.2 欧拉图	36
1) 欧拉通路(回路)与欧拉图	36
2) 欧拉通(回)路与欧拉图定义补充与约定	36
3) 无向图欧拉定理	37
4) 欧拉有向图定理	37
7.4.3 哈密顿图	38
1) 哈密顿图的基本性质与结构特点	39
2) 哈密顿图的割点推论	39
3) 哈密顿性的度数和充分条件	40
4) 哈密顿图的最小度充分条件推论	40
5) 有向图哈密顿通路的充分条件定理	40
6) 相邻相容问题与哈密顿通(回)路	40
7.4.4 平面图	41
1) 平面图与其嵌入	41

2) 平面图的基本性质与常见非平面图示例	42
3) 平面图面结构核心术语	42
4) 平面图面次数和公式	43
5) 极大平面图	43
6) 极大平面图的判定	44
7.4.5 图的拓扑变换与平面性判定	44
1) 平面图欧拉公式及其重要推论	44
2) 图的同胚与同胚变换	45
3) 图的边收缩 / 收缩变换	46
4) 图的拓扑变换与平面性判定	46
7.4.6 平面图的着色	47
1) 平面图的对偶图	47
2) 图的着色	48
3) 五色定理	48
4) 四色定理	49
5) 地图着色	49
知识扩展提示词	50
第 7 章主要数学符号列表	50

第 7 章 图论

图是人类认知世界、组织社会、传递经验的符号系统，集中体现了人对世界的认知关系、人与人的社会结构关系，以及人与文化的意义传递关系。图论则是将符号系统中的关系结构抽取出来，通过点与边的抽象形式，揭示关系的本质规律，并用以解决连接、路径、优化、划分、匹配等各类可结构化的问题。

7.1 图的基本概念

图论起源于经典的七桥问题，欧拉通过将实际问题中的陆地抽象为顶点、桥梁抽象为边，首次使用点与边的结构描述现实系统中的事物与关系，标志着图论的诞生。图论以抽象的图模型为核心工具，把复杂系统简化为由顶点集合和边集合构成的数学结构，从而系统研究事物之间的连接方式、结构性质与运行规律。本节从图的基本概念出发，介绍图的定义、类型与相关性质，为图论的理论分析与实际应用奠定基础。本节从图的结构与关系维度出发，给出图的数学定义、基本性质与典型结构，系统刻画图的形式化特征。

7.1.1 无向图与有向图

图可以用于对现实世界事物之间的对称与非对称、单向与双向等复杂关系建立准确的结构模型，进而正确研究图的连通性、可达性、路径与算法性质。

1) 经典问题与图模型

图论的经典问题源于现实系统的抽象建模，广泛对应交通、通信、工程、社会等实际场景。最短路径问题对应交通路网的最优路线规划，最小生成树问题对应通信网络的低成本连通设计，最大流问题对应物流与管道网络的流量优化，拓扑排序问题对应软件与项目中的依赖执行顺序，最小割问题对应社会网络与关键链路的分割识别。这些典型应用直观展现了图模型对现实关系系统的刻画能力。

(1) 最短路径问题：最短路径问题研究加权图中两顶点之间权值最小的路径，是图论中最基础的优化问题。典型应用于交通路网导航、路径规划等场景，常用算法包括 Dijkstra、Bellman-Ford、Floyd-Warshall 等。

(2) 最小生成树问题：最小生成树问题在带权无向连通图中，寻找连接所有顶点且边权总和最小的生成树。主要用于通信网络、电力网络、布线设计等追求总成本最低的场景，典型算法有 Kruskal 和 Prim 算法。

(3) 最大流问题：最大流问题在带容量的有向网络中，求解从源点到汇点的最大可行流量。广泛应用于物流运输、管道输送、网络带宽分配等流量调度场景，常用算法包括 Ford-Fulkerson、Dinic 等。

(4) 拓扑排序问题：拓扑排序问题针对有向无环图，将顶点排成满足所有有向边先后约束的线性序列。常用于任务调度、课程安排、软件工程依赖编译等场景，可通过深度优先搜索 DFS 或广度优先搜索 BFS 实现。

(5) 最小割问题：最小割问题寻找图中权值最小的边集，删除后可使图不再连通。它在网络分割、社区发现、关键链路识别等领域具有重要应用，典型算法有 Stoer-Wagner、Karger 等。

2) 图的集合论基础&

关系理论、函数与图论均建立在集合论基础之上。集合 A, B 的无序积 $A \times B$ 中的元素为无序对 $\{a, b\}$ ，用于表示无向边，是定义无向图的基础。 A, B 的无序积可定义为： $A \times B = \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in B, a \neq b\}$ 。

有序对 (a, b) 是集合 A, B 的笛卡尔积 $A \times B$ 中的元素，具有明确顺序与方向，用于表示有向边，是定义有向图、二元关系与函数的基础。 A, B 的有序积可定义为： $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ ，有的资料也用圆括号表示有序对。

当图中允许两个顶点之间存在多条边，就需要引入广义集合论中多重集合来描述。广义集合论是对朴素集合论的扩展，放宽部分约束，引入多重集合、模糊集合等扩展结构，使集合论能够统一刻画普通图、有向图、无向图和多重图。

定义 7.1: 多重集合

一个多重集合 M 是一个有序对 $M = (A, m)$ ，满足以下条件：

基础集合： A 是由 M 中所有不同元素构成的普通集合。

重复度函数：函数 $m: A \rightarrow \mathbb{N}^+$ 为每个元素 $a \in A$ 指派一个正整数 $m(a)$ ，称为该元素的重复度。

3) 无向图

无向图重点抽象无方向的连接关系，核心在于构建顶点间邻接结构的数学模型，用于分析连通性、路径与优化问题。

定义 7.2: 无向图

无向图 G 形式化表示为有序对 $G = (V, E)$ ，其中：

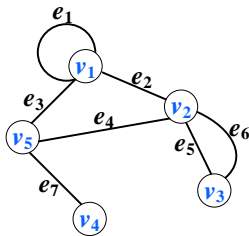
顶点集 $V \neq \emptyset$ ，即 V 是一个非空集合，其元素称为顶点或结点；

边集 E 是顶点集 V 与自身的无序积 $V \times V$ 的多重子集，其元素称为无向边，简称边。

为明确区分不同无向图的顶点集与边集，有时也用 $V(G)$ 表示图 G 的顶点集，用 $E(G)$ 表示图 G 的边集。

例如， $G = (V, E)$ 如下图所示，其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$

$E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_1, v_5), (v_4, v_5)\}$



4) 有向图

有向图可用于建立有方向的关联、流动过程和状态转移等问题的数学模型，核心是通过有向边刻画“方向”特征，把那些有方向性的问题转化成容易分析的数学形式。

定义 7.3: 有向图

有向图 $D=(V,E)$ 由两部分组成:

一个非空集合 V , 称为顶点集, 其元素称为顶点或结点;

一个多重集合 E , 它是顶点集 V 与自身的笛卡尔积 $V \times V$ 的多重子集, 称为边集。 E 中的元素称为有向边, 简称边 (部分语境中也称为弧)。

有时用 $V(D)$ 表示有向图 D 的顶点集, 用 $E(D)$ 表示有向图 D 的边集。

5) 图的典型类别

根据有图顶点集 V 和边集 E 的性质, 图可细分为如下典型类别:

有限图: 顶点集 V 和边集 E 均为有穷集合的图;

n 阶图: 含有 n 个顶点的图 (n 为正整数);

零图: 边集 $E=\emptyset$ 的图 (顶点集 $V \neq \emptyset$);

平凡图: 只有一个顶点, 且边集 $E=\emptyset$ 的图 (即 $|V|=1, E=\emptyset$);

空图: 顶点集 $V=\emptyset$ 的图 (此时边集 E 必为空)。

6) 图的关联关系与相邻关系**定义 7.4:** 无向图的关联关系与相邻关系

设无向图 $G=(V,E)$, 其中 V 为顶点集, E 为边集, 有定义如下:

(1) 关联关系与关联次数

对于任意边 $e_k=(v_i, v_j) \in E$, 称 v_i, v_j 为 e_k 的端点, e_k 与 v_i (或 v_j) 具有关联关系, 简称边与顶点关联。边与顶点的关联次数定义如下:

若 $v_i \neq v_j$ (即边 e_k 为普通边, 非环), 则边 e_k 与顶点 v_i, v_j 的关联次数均为 1;

若 $v_i = v_j$ (即边 e_k 为环), 则边 e_k 与顶点 v_i (或 v_j) 的关联次数为 2;

若顶点 v_i 不是边 e 的端点, 则边 e 与顶点 v_i 的关联次数为 0。

(2) 顶点和边的相邻关系

对于任意两个顶点 $v_i, v_j \in V$, 若存在边 $e=(v_i, v_j) \in E$ (即两个顶点为同一条边的端点), 则称顶点 v_i 与 v_j 相邻, 简称顶点相邻。

对于任意两条边 $e_k, e_l \in E$, 若 e_k 与 e_l 有一个公共端点 (即存在顶点 $v_i \in V$, 使得 v_i 同时是 e_k 和 e_l 的端点), 则称边 e_k 与 e_l 相邻, 简称边相邻。

定义 7.5: 有向图的关联关系与相邻关系

设有向图 $D=(V,E)$, 其中 V 为顶点集, E 为边集, 有向边 (简称边) 记为 $e_k=(v_i, v_j)$ (v_i 为起点, v_j 为终点), 具体定义如下:

(1) 关联关系与关联次数

对于任意有向边 $e_k=(v_i, v_j) \in E$, 称顶点 v_i 为边的起点, v_j 为边的终点, 边 e_k 与顶点 v_i, v_j 均具有关联关系, 简称边与顶点关联。边与顶点的关联次数定义如下:

若 $v_i \neq v_j$ (非环有向边), 则边 e_k 与起点 v_i 、终点 v_j 的关联次数均为 1;

若 $v_i = v_j$ (有向环), 则边 e_k 与该顶点 (既是起点也是终点) 的关联次数为 2;

若顶点 v_i 既不是边 e 的起点, 也不是终点, 则边 e 与顶点 v_i 的关联次数为 0。

(2) 顶点和边的相邻关系

对于任意两个顶点 $v_i, v_j \in V$, 若存在有向边 $e=(v_i, v_j) \in E$ 或 $e=(v_j, v_i) \in E$ (即两个顶点为同一条有向边的起点和终点), 则称顶点 v_i 与 v_j 相邻, 简称顶点相邻。

对于任意两条有向边 $e_k, e_l \in E$, 若 e_k 与 e_l 有一个公共顶点 (该顶点可为一条边的起点、另一条边的终点, 或两条边的起点 / 终点), 则称边 e_k 与 e_l 相邻, 简称边相邻。

7.1.2 顶点度与握手引理

顶点度用于刻画图中顶点与边的连接数量, 是图的局部结构特征; 握手引理则揭示了所有顶点度数之和等于边数两倍的数量关系, 是图的全局结构约束。二者共同从顶点连接关系这一维度, 描述了图的基本结构性质。

1) 无向图的顶点度

定义 7.6: 无向图的顶点度

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图, $v \in V$,

顶点 v 的度数 (度) $d(v)$: 顶点 v 作为边的端点出现的次数之和;

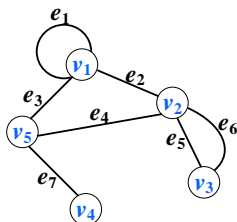
悬挂顶点: 度数为 1 的顶点;

悬挂边: 与悬挂顶点相关联的边;

图 G 的最大度 $\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V\}$;

图 G 的最小度 $\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V\}$ 。

例 7.1: 计算下图 G 各节点的 $d(v)$ 、 $\Delta(G)$ 、 $\delta(G)$ 。



解:

(1) 计算每个顶点的度数 $d(v)$:

v_1 : 关联边 e_1 (自环, 贡献 2 度)、 e_2 、 e_3 , 所以 $d(v_1) = 2 + 1 + 1 = 4$

v_2 : 关联边 e_2 、 e_4 、 e_5 、 e_6 , 所以 $d(v_2) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

v_3 : 关联边 e_5 、 e_6 , 所以 $d(v_3) = 1 + 1 = 2$

v_4 : 关联边 e_7 , 所以 $d(v_4) = 1$

v_5 : 关联边 e_3 、 e_4 、 e_7 , 所以 $d(v_5) = 1 + 1 + 1 = 3$

(2) 图 G 的最大度 $\Delta(G)$ 和最小度 $\delta(G)$:

$\Delta(G) = \max\{4, 4, 2, 1, 3\} = 4$

$\delta(G) = \min\{4, 4, 2, 1, 3\} = 1$

最终结果:

$d(v_1) = 4, d(v_2) = 4, d(v_3) = 2, d(v_4) = 1, d(v_5) = 3$

$\Delta(G) = 4, \delta(G) = 1,$

v_4 是悬挂顶点, e_7 是悬挂边, e_1 是环。

2) 有向图的顶点度

定义 7.7: 有向图的顶点度

设 $D = \langle V, E \rangle$ 为有向图, $v \in V$ 。

出度 $d^+(v)$: 以顶点 v 为起点的边的条数。

入度 $d^-(v)$: 以顶点 v 为终点的边的条数。

顶点 v 的度 $d(v)$: 与顶点 v 关联的边的总数 (无论作为起点还是终点), 满足 $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$ 。

有向图 D 的相关参数:

最大出度 $\Delta^+(D) = \max\{d^+(v) \mid v \in V\}$

最小出度 $\delta^+(D) = \min\{d^+(v) \mid v \in V\}$

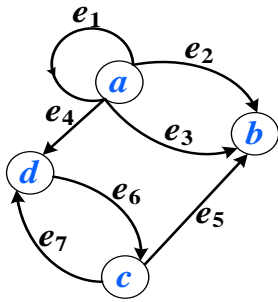
最大入度 $\Delta^-(D) = \max\{d^-(v) \mid v \in V\}$

最小入度 $\delta^-(D) = \min\{d^-(v) \mid v \in V\}$

最大度 $\Delta(D) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$

最小度 $\delta(D) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$

例 7.2: 计算下图 D 各节点的 $d^+(v)$ 、 $d^-(v)$ 、 $d(v)$, 图 G 的 $\Delta^+(D)$ 、 $\Delta^-(D)$ 、 $\Delta(D)$ 、 $\delta^+(D)$ 、 $\delta^-(D)$ 和 $\delta(D)$ 。



顶点 a :

出边: e_1 (自环, 出度 +1)、 e_2 ($a \rightarrow b$)、 e_4 ($a \rightarrow d$) $\rightarrow d^+(a) = 1 + 1 + 1 = 3$

解: 最终结果汇总如下表:

顶点	$d^+(v)$	$d^-(v)$	$d(v)$
a	4	1	5
b	0	3	3
c	2	1	3
d	1	2	3

$\Delta^+(D) = 4$, $\delta^+(D) = 0$

$\Delta^-(D) = 3$, $\delta^-(D) = 1$

$\Delta(D) = 5$, $\delta(D) = 3$

3) 握手定理

定理 7.1: 握手定理 / 总度数定理

在任意无向图或有向图中, 所有顶点的度数之和等于边数的两倍。

设图有 n 个顶点 v_1, v_2, \dots, v_n , m 条边, 则 $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$ 。

证明: 图中每条边 (包括自环) 都有两个端点。因此, 在对所有顶点的度数求和时, 每条边对总度数恰好贡献 2。所以, m 条边对应的总度数为 $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$

推论: 在任意无向图或有向图中, 度数为奇数的顶点个数必为偶数。

证明: 设 $G=\langle V,E \rangle$ 为任意图, 边数为 m 。由握手定理 $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$ 可知, 所有顶点度数之和是偶数。

定理 7.2: 有向图出入度定理

在有向图中, 所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和, 且都等于边数 m 。

$$\sum_{i=1}^n d^+(v_i) = \sum_{i=1}^n d^-(v_i) = m$$

证明: 每条有向边恰好贡献一个出度和一个入度。

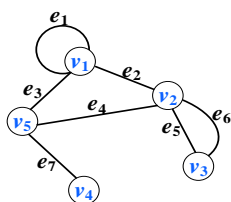
4) 图的度数序列

图的度数序列是将图中所有顶点的度数按非递增或非递减顺序排列得到的序列, 它从全局刻画顶点的连接分布, 是图的重要不变量, 可用于图的识别、分类与比较。

定义 7.8: 无向图的度数序列

设无向图 $G=\langle V,E \rangle$, 顶点集 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。将每个顶点的度数 $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$ 按顶点顺序排列得到的序列, 称为 G 的度数序列 (degree sequence)。通常按非递增或非递减顺序排列。

例如, 下图的度数序列为: 4,4,2,1,3



定义 7.9: 有向图的度数序列、出度列、入度列

设有向图 $D=\langle V,E \rangle$, 顶点集 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。

出度列 (out-degree sequence): 顶点 v_i 的出度 $d^+(v_i)$ 按顺序排列: $d^+(v_1), d^+(v_2), \dots, d^+(v_n)$

入度列 (in-degree sequence): 顶点 v_i 的入度 $d^-(v_i)$ 按顺序排列: $d^-(v_1), d^-(v_2), \dots, d^-(v_n)$

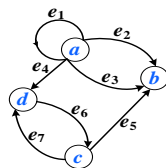
度数序列 (degree sequence): 顶点 v_i 的总度数 $d(v_i) = d^+(v_i) + d^-(v_i)$ 按顺序排列: $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$ 。

例如, 右图的度数序列为:

度数序列: 5, 3, 3, 3

出度列: 4, 0, 2, 1

入度列: 1, 3, 1, 2



顶点的度是描述图中顶点与边关联关系的基本度量 (无向图为顶点作为边端点的次数, 有向图分为出度与入度); 握手引理作为图论基础定理, 明确了顶点度数之和与边数的核心关系, 为图的计数与验证提供依据; 度数序列直观反映图的整体连接结构, 是图的重要不变量。三者相互关联, 共同构成图结构分析、判定、分类及图论推理的基础工具。

5) 图的度数序列判定与应用

图的度数序列是判断序列能否构成图的理论依据, 也是分析图结构、刻画网络特征、支撑算法设计的重要工具, 可用于图同构判别、图性质推导、各类实际网络建模与优化, 是连接图论理论与实际应用的关键基础。

可图化判定是判断一组非负整数序列能否作为某个图的顶点度数，主要依据握手定理（度数和为偶数、奇度点个数为偶数），并通过 Havel-Hakimi 算法和 Erdős-Gallai 定理进一步判定能否构成简单图，是图论中验证序列合法性与构造对应图的基础。

例 7.3: 判断下列两组非负整数序列能否构成无向图的度数列：

(1) 3,3,3,4 (2) 1,2,2,3

解: 对于序列 (1)，度数和 $3+3+3+4=13$ ，为奇数，由握手定理知，不能作为无向图的度数列。对于序列 (2)，度数和 $1+2+2+3=8$ ，为偶数，满足握手定理，可以作为无向图的度数列。

例 7.4: 已知图 G 有 10 条边，其中有 4 个 3 度顶点，其余顶点的度数均不超过 2，求图 G 中最少有多少个顶点。

解: 设图 G 的顶点数为 n ，边数 $m=10$ 。由握手定理： $\sum_{v \in V} d(v)=2m=20$

已知有 4 个顶点度数为 3，这 4 个顶点的度数和为： $4 \times 3=12$

设其余顶点数为 $n-4$ ，且每个顶点度数 ≤ 2 ，则其余顶点度数和 $\leq 2(n-4)$ 。

总度数满足： $12+2(n-4) \geq 20$

解得： $2(n-4) \geq 8 \Rightarrow n-4 \geq 4 \Rightarrow n \geq 8$

答：图 G 中至少有 8 个顶点。

例 7.5: 设有向图的阶数为 5，其度序列为 3,3,2,3,3，出度序列为 1,2,1,2,1，求该有向图的入度序列。

解: 在有向图中，对每个顶点有度=出度+入度，逐点计算：

$3-1=2$ ， $3-2=1$ ， $2-1=1$ ， $3-2=1$ ， $3-1=2$

所以入度序列为：2,1,1,1,2。

例 7.6: 证明不存在具有奇数个面且每个面都具有奇数条棱的多面体。

证明: 采用反证法，假设存在这样的多面体，设其面数为 f ，第 i 个面的棱数为 r_i 。

① 条件设定：根据假设，面数 f 为奇数，且每个面的棱数 r_i 也均为奇数。

② 应用握手定理：将多面体的面与棱的关系抽象为图论中的握手定理。所有面的棱数之和等于 $2m$ (m 为多面体的棱数)，因为每条棱都被两个面共享，即 $\sum_{i=1}^f r_i = 2m$ 。

③ 导出矛盾：等式右边 $2m$ 必为偶数。等式左边为 f 个奇数相加，由于奇数个奇数之和为奇数，故左边总和为奇数。奇数不可能等于偶数，产生矛盾。

因此，假设不成立。不存在具有奇数个面且每个面都具有奇数条棱的多面体。

例 7.7: 设有一个 9 阶简单无向图，每个顶点的度数为 5 或 6，证明该图中至少有 5 个 6 度顶点，或至少有 6 个 5 度顶点。

证明:

① 设图中 6 度顶点的个数为 x ，5 度顶点的个数为 y 。因为图是 9 阶图，所以 $x+y=9$ 。

② 采用反证法：假设结论不成立，即图中至多 4 个 6 度顶点且至多 5 个 5 度顶点，也就是 $x \leq 4, y \leq 5$ 。

③ 由 $x+y=9$ ， $x \leq 4$ ， $y \leq 5$ ，可得 $x=4, y=5$ 。此时图的总度数为 $6x+5y=6 \times 4+5 \times 5=24+25=49$ 。

根据握手定理，无向图的总度数必为偶数，而 49 是奇数，矛盾。

因此假设不成立，原命题成立：该 9 阶简单无向图中至少有 5 个 6 度顶点，或至少有 6 个 5 度顶点。

度数列作为图的结构不变量，其应用可拓展到很多领域，下表示列出了部分主要应用场景：

应用领域	作用
图结构分析与分类	图性质推断：由度数序列判断连通性、是否含环、是否为树。 特殊图识别：正则图、二部图、完全图等快速判定。
网络建模与分析	社会网络：用度数序列描述用户好友数，分析中心性、传播效率、社区结构。 计算机/通信网络：路由器/节点度数→评估负载、瓶颈、可靠性与路由设计。 生物网络：蛋白质互作、基因调控网络的度分布→识别关键节点。 交通/物流网络：路口/站点度数→优化流量、规划路径。
算法设计与问题求解	图构造：给定度数序列，用 Havel-Hakimi 算法生成对应简单图。 组合优化：度数序列约束下的图生成、匹配、染色、旅行商等问题建模。 数据验证：验证网络数据的合理性（如社交网络好友数是否满足握手定理）。

7.1.3 常见图类型

这定义是按照图中是否存在平行边（多重边）与环（自环）这两个核心性质对图进行分类的。

1) 多重图与简单图

定义 7.10: 平行边、多重图、伪图

在无向图中，连接同一对不同顶点的两条或多条边，称为平行边，平行边的条数称为该边的重数。

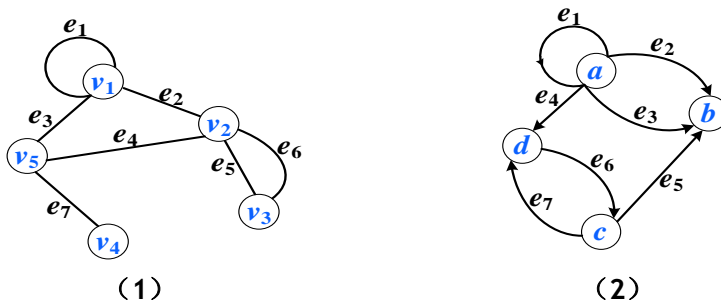
在有向图中，具有相同始点和相同终点的两条或多条有向边，称为有向平行边（简称平行边），其条数称为重数。

含平行边的图称为多重图。

既无平行边也无环的图称为简单图。

既包含平行边，又包含环的图称为伪图。

例 7.8: 判断图的类型



解:

图(1)中边 e_1 是顶点 v_1 上的自环，边 e_5 、 e_6 是连接顶点 v_2 与 v_3 的两条平行边，重数为 2，因此是无向多重图（伪图）

在图(2)中，边 e_1 是顶点 a 上的有向自环；边 e_2 、 e_3 是从顶点 a 到 b 的两条有向平行边，重数为 2；因此是有向多重图（伪图）。

2) 完全图与正则图

定义 7.11: 完全图与 k -正则图

无向完全图: 是指在一个无向简单图中, 任意两个不同的顶点之间都恰好有一条边相连。含 n 个顶点的无向完全图记为 K_n 。

有向完全图: 是指在一个有向简单图中, 任意两个不同的顶点之间都恰好有两条方向相反的有向边相连。

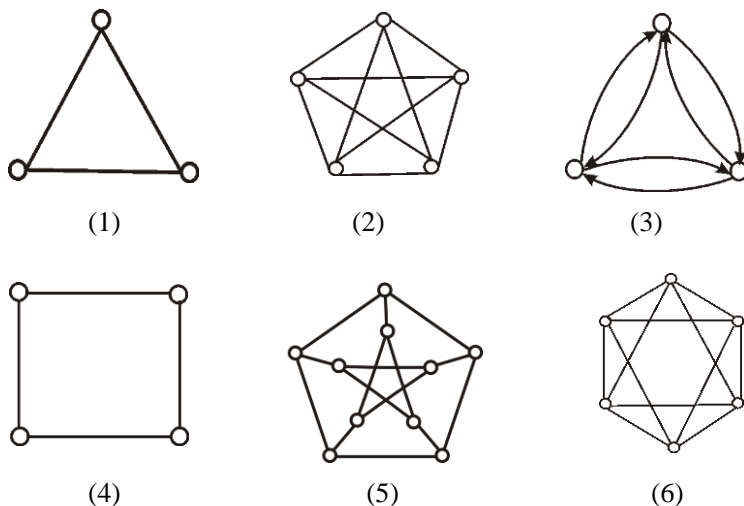
k -正则图: 是指在一个无向简单图中, 每个顶点的度数都恰好等于 k 。

含 n 个顶点的无向完全图 K_n 有 $n(n-1)/2$ 条边, 且每个顶点的度数均为 $n-1$ 。

有向完全图是每对不同顶点间均有两条方向相反的有向边的有向简单图, 含 n 个顶点时, 其边数为 $n(n-1)$, 每个顶点的出度和入度均为 $n-1$, 总度数为 $2(n-1)$ 。

k -正则图是每个顶点度数均为 k 的无向简单图, 含 n 个顶点时, 其边数为 $\frac{k \cdot n}{2}$, 且 $k \cdot n$ 必须为偶数。

例 7.9: 判断图的类型



解:

图 (1): 每对顶点间均有一条边, 无环, 无平行边。是无向完全图 K_3 , 同时也是 2-正则图 (每个顶点度数为 2)。

图 (2): 每对顶点间均有一条边, 无环, 无平行边。是无向完全图 K_5 , 同时也是 4-正则图 (每个顶点度数为 4)。

图 (3): 每对顶点间均有两条方向相反的有向边, 无环, 无有向平行边。是有向完全图

图 (4): 4 个顶点构成一个环, 无自环, 无平行边, 是无向简单图; 每个顶点度数为 2, 是 2-正则图; 但不是完全图 (K_4 应有 6 条边, 此图仅有 4 条)。

图 (5): 10 个顶点, 15 条边, 每个顶点的度数均为 3 (每个顶点连接 3 条边), 属于无向简单图和 3-正则图 (彼得松图)。

图 (6): 无平行边, 无环, 是无向简单图; 不满足完全图条件, 每个顶点度数为 4, 因此它是一个 4-正则图。

3) 环图与轮图

定义 7.12: 圈图 (Cycle Graph) 与轮图 (Wheel Graph)

无向圈图: 设 $n \geq 3$ 为正整数, 由顶点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 和无向边集 $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$ 组成的无向图称为 n 阶圈图, 记作 $C_n = \langle V, E \rangle$ 。

有向圈图: 设 $n \geq 2$ 为正整数, 由顶点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 和有向边集 $E = \{\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \dots, \langle v_{n-1}, v_n \rangle, \langle v_n, v_1 \rangle\}$ 组成的有向图称为 n 阶有向圈图, 记作 $\vec{C}_n = \langle V, E \rangle$ 。

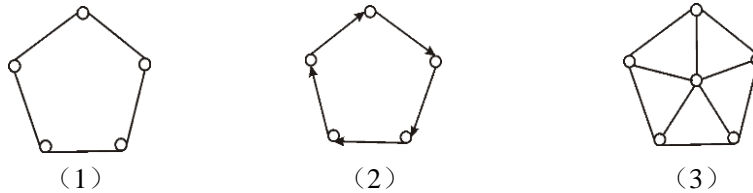
轮图: 对于 $n \geq 3$, 在 n 阶无向圈图 C_n 中增加一个新顶点, 并将这个新顶点与 C_n 的每一个顶点之间各连一条边, 所得到的无向图称为 n 阶轮图, 记作 W_n 。

无向圈图是由全部 n 个顶点构成唯一一个圈, 除此之外没有其他边、没有其他结构的无向图。在无向图中, 若存在一条起点和终点相同、其余顶点互不相同、边互不重复的路径, 则称这条路径为一个无向圈。一个图只要包含一个无向圈, 不管它还有多少顶点、多少边, 都称该图含有无向圈。

有向圈图是由全部 n 个顶点构成唯一一个有向圈, 除此之外没有其他边、没有其他结构的有向图。在有向图中, 若存在一条起点和终点相同、其余顶点互不相同、边互不重复且所有边方向一致的路径, 则称这条路径为一个有向圈。一个图只要包含一个有向圈, 不管它还有多少顶点、多少边, 都称该图含有有向圈。

图中的环 (自环 loop) 是指一个顶点到自身的边, 仅涉及一个顶点与一条边; 圈 (cycle) 是指起点与终点相同、其余顶点和边均不重复的闭合路径, 无向圈至少需要 3 个顶点, 有向圈至少需要 2 个顶点, 二者是图论中完全不同的概念。

例如, 在下图中, 图 (1) 是 5 阶无向圈图 C_5 , 图 (2) 是 5 阶有向圈图 \vec{C}_5



4) 超立方体图

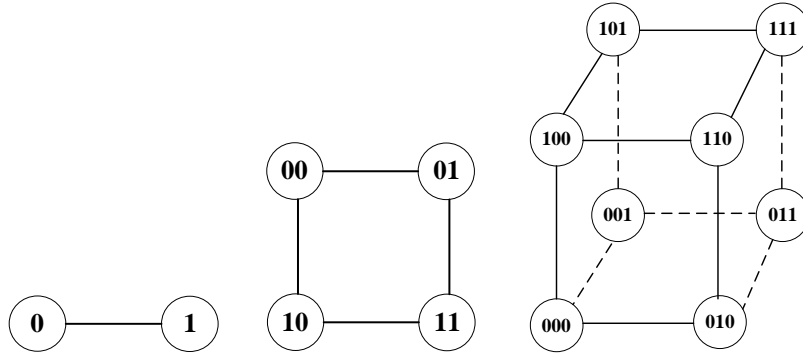
定义 7.13: n 方体图

n 方体图 (n -维超立方体图) $Q_n = \langle V, E \rangle$ 是 2^n 阶无向简单图, 其中

顶点集 $V = \{v \mid v = a_1 a_2 \dots a_n, a_i = 0, 1, i = 1, 2, \dots, n\}$,

边集 $E = \{(u, v) \mid u, v \in V \wedge u$ 与 v 恰好有一位数字不同 $\}$ 。

例如, 下图中, 依次是超立方体图 Q_1 、 Q_2 和 Q_3 。



图中各节点二进制码分配次序需要保证相邻顶点的二进制串只变化一位，按顺时针 / 逆时针一圈必须是格雷码 (Gray Code) 顺序。

例如 Q_2 (正方形) 的分配次序为: $00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$;

Q_3 (立方体) 的分配次序为:

底面: $000 \rightarrow 001 \rightarrow 011 \rightarrow 010$

顶面: $100 \rightarrow 101 \rightarrow 111 \rightarrow 110$

7.1.4 子图与补图

子图是图建模的“解剖刀”，用于拆解、聚焦与简化；补图是“透视镜”，用于反转视角、揭示隐性关系与对偶问题。二者结合，为复杂系统的建模、分析与优化提供了完整且强大的理论与工具支撑。

1) 子图

定义 7.14: 子图、真子图与导出子图

设 $G=\langle V,E\rangle, G'=\langle V',E'\rangle$ 是两个图 (同为无向图, 或同为有向图)。

若 $V'\subseteq V$ 且 $E'\subseteq E$, 则称 G' 为 G 的子图, G 为 G' 的母图, 记作 $G'\subseteq G$ 。

若 $G'\subseteq G$ 且 $V'=V$, 则称 G' 为 G 的生成子图。

若 $V'\subset V$ 或 $E'\subset E$, 则称 G' 为 G 的真子图。

设 $V'\subseteq V$ 且 $V'\neq\emptyset$, 以 V' 为顶点集, 以两个端点都在 V' 中的所有边为边集的 G 的子图, 称为由顶点子集 V' 的导出子图, 记作 $G[V']$ 。

设 $E'\subseteq E$ 且 $E'\neq\emptyset$, 以 E' 为边集, 以 E' 中所有边关联的所有顶点为顶点集的 G 的子图, 称作由边子集 E' 的导出子图, 记作 $G[E']$ 。

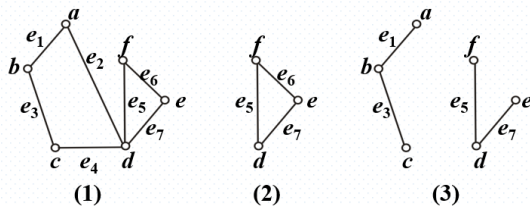
例如, 下图中,

图(1),(2),(3)是(1)的子图, 图(2),(3)是真子图, 图(1)是母图;

图(1),(3)是图(1)的生成子图;

图(2)是顶点子集 $\{d,e,f\}$ 的导出子图, 也是边子集 $\{e_5, e_6, e_7\}$ 导出子图;

图(3)是边子集 $\{e_1, e_3, e_5, e_7\}$ 的导出子图。



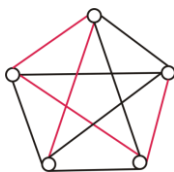
2) 补图

完全图 K_n 包含顶点之间所有可能的边，结构过于稠密，直接分析其内部子图的团、独立集、连通性等性质往往困难且不便。这时可利用补图分解，将完全图拆分为原图 G 与其补图 \bar{G} 两部分，二者顶点集相同、边集互不相交，且边集的并恰好构成完全图 K_n ，从而将复杂问题简化，实现对完全图内部性质的有效讨论与推导。

定义 7.15: 补图

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是 n 阶简单无向图。记 $V \& V$ 为顶点集 V 中所有不同顶点构成的无序对集合，令 $\bar{E} = V \& V - E$ ，则称图 $\bar{G} = \langle V, \bar{E} \rangle$ 为图 G 的补图。

例如：下图中由红色边构成的图是由黑色边构成的图的补图，它们的顶点相同。



7.1.5 图同构

图同构用于判断外观、编号、布局不同的图是否具有相同的本质拓扑结构，可忽略顶点命名、位置与画法等非本质差异，将结构一致的图归为同类。借助同构关系，只需研究一个代表图，就能推知所有与其同构图共同性质。

1) 图同构的定义

定义 7.16: 图同构

设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 为两个无向图（或有向图）。若存在双射 $f: V_1 \rightarrow V_2$ ，使得对任意 $v_i, v_j \in V_1, (v_i, v_j) \in E_1 \iff (f(v_i), f(v_j)) \in E_2$ 且 $(v_i, v_j) \in E_1$ 与 $(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$ 的重数相同，则称 G_1 与 G_2 是同构的，记作 $G_1 \cong G_2$ 。

2) 图同构的判定

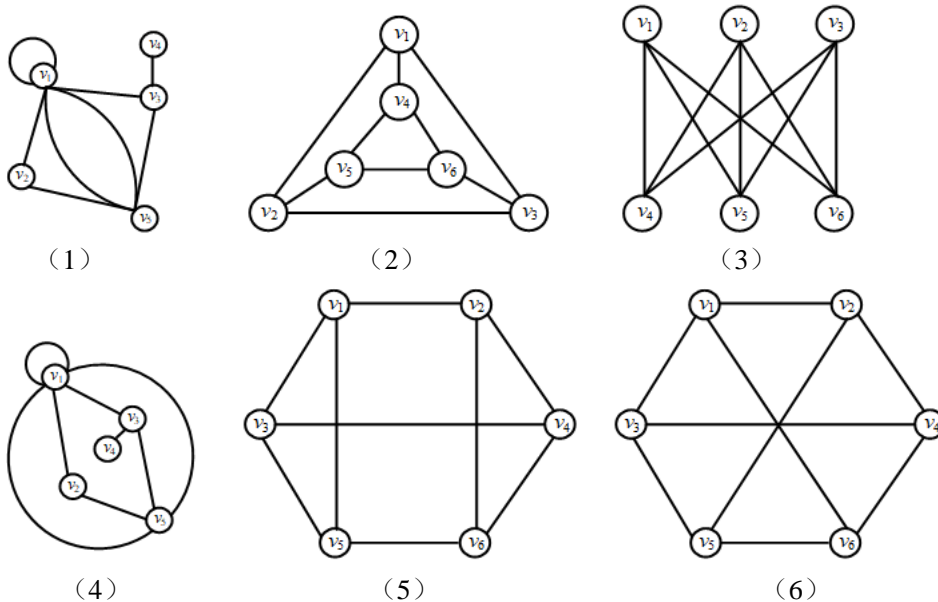
图同构判定是 NP 问题，目前无通用多项式时间算法，核心流程为：先用同构不变量快速排除，再构造或验证双射，最后用算法 / 工具处理复杂情况。主要方法如下：

(1) 必要条件筛选法：利用同构不变量（同构图必保持一致的性质）快速筛除不同构图，关键不变量包括：① 顶点数与边数相等；② 排序后度数序列（含自环、重数）一致；③ 自环数 / 平行边数 / 连通分支数等特殊结构一致；④ 子图特征（如最大团、环长分布）一致。

(2) 定义构造法：适用于顶点数较少 ($n \leq 7$) 或结构高度对称的图，依据同构定义构造顶点双射 $f: V_1 \rightarrow V_2$ ，验证任意边 $(v_i, v_j) \in E_1$ 当且仅当 $(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$ ，且边的重数、方向（有向图）完全对应，可得到严格证明。

(3) 不变量精化法：用于解决必要条件无法区分的疑难情况，在基础不变量上进一步精细化，包括邻接矩阵特征值 / 行列式 / 秩、顶点间最短距离分布、色数 / 团数等参数，以及通过迭代分配“颜色”，依据最终颜色集判定。

例 7.10: 判断下面图是否同构



解:

(1) 图 (1) \leftrightarrow 图 (4)

顶点数、边数、度数序列完全一致，只是边的画法不同，结构可一一映射，二者同构。

(2) 图 (2)、(3)、(5)、(6)

这四个图的度数序列都是全 3，但需要进一步区分：

图 (2)：存在 2 个互不相交的三角形外圈： $v_1 v_2 v_3$ ，内圈： $v_4 v_5 v_6$ ，6 个顶点均分在两个三角形中，无公共顶点；

图 (3)：标准完全二部图 $K_{3,3}$ ，无三角形，是 3-正则、非平面图；

图 (5)：存在 2 个互不相交的三角形 $v_1 v_3 v_5$ 、 $v_2 v_4 v_6$ ，6 个顶点均分在两个三角形中，无公共顶点；

图 (6)：正六边形，6 个顶点，内部连成 6 个等边三角形，6 个顶点全在外围，没有中心点。它也是 3-正则，没有三角形（最小圈是 4/6 圈），同样是二部图、非平面图，本质就是换了画法的 $K_{3,3}$ 。

结论：图 (1) 和图 (4) 同构；图 (2) 和图 (5) 同构（都是平面图）；图 (3) 和图 (6) 同构（都是非平面图 $K_{3,3}$ ）。

例 7.11: 画出 4 阶 3 条边的所有非同构无向简单图。

解: 4 个顶点、3 条边的无向简单图，总度数为 6（边的 2 倍）。

将度数 6 分配给 4 个顶点，约束条件为：每个顶点的度数 ≤ 3 （最多有 3 条边），由握手定理的推论，奇度顶点的个数必须是偶数。

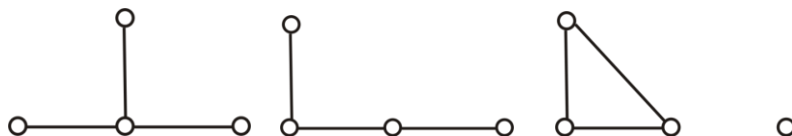
满足条件的非同构度数序列共有 3 组：

(1,1,1,3): 4 个奇度顶点（偶数个），和为 6。

(1,1,2,2): 2 个奇度顶点（偶数个），和为 6。

(0,2,2,2): 0 个奇度顶点（偶数个），和为 6。

对应可画出 3 个非同构的无向简单图。

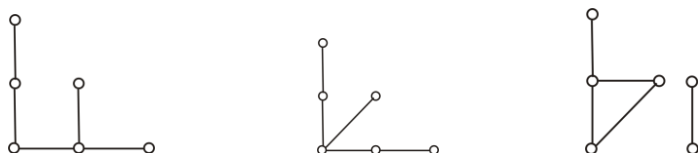


例 7.12: 画出 3 个以 1,1,1,2,2,3 为度数列的非同构的无向简单图。

解:

(1) 度数列合法性验证: 顶点数 $n=6$, 总度数 12, 边数 $m=6$ 。最大度 $3 \leq 5$, 奇度顶点共 4 个 (偶数), 满足简单图与握手定理约束, 可图化。

(2) 非同构图构造: 以度数为 3 的顶点 v 为核心, 通过改变其邻接顶点类型构造 3 种非同构图, 存在至少 3 个以 (1,1,1,2,2,3) 为度数列的非同构无向简单图。



7.2 图的连通性

图的连通性主要研究图中顶点之间的可达关系, 以及图在删除顶点或边后仍保持连通的“坚韧程度”。连通性分析可用于判断顶点间的可达性、分解图的结构、评估网络的鲁棒性, 以及进行图的分类与同构判定。

7.2.1 通路与回路

1) 定义

定义 7.17: 通路与回路

给定图 $G=(V,E)$ (无向图或有向图), 设 $\Gamma=v_0e_1v_1e_2\dots e_lv_l$ 是 G 中顶点与边交替出现的序列。

(1) 若对任意 $i(1 \leq i \leq l)$, 都有 $e_i=(v_{i-1}, v_i)$ (有向图中为 $\langle v_{i-1}, v_i \rangle$), 则称 Γ 是从 v_0 到 v_l 的通路, v_0 与 v_l 分别称为通路的起点与终点, l 称为通路长度。若 $v_0 = v_l$, 则称该通路为回路或圈。

(2) 若通路 Γ 中所有顶点互不相同, 则称为初级通路。若回路 $\Gamma (v_0 = v_l)$ 中除起点与终点外, 其余顶点均互不相同, 则称为初级回路 (或初级圈)。长度为奇数的圈称为奇圈, 长度为偶数的圈称为偶圈。

(3) 若通路 Γ 中所有边均互不相同, 则称为简单通路; 否则称为复杂通路。若回路 $\Gamma (v_0 = v_l)$ 中所有边均互不相同, 则称其为简单回路; 否则称为复杂回路。

下表是通路与回路概念对照表:

名称	英文	顶点重复	边重复
通路	Paths	可重复	可重复
回路	Circuit	可重复	可重复
初级通路	Elementary Path	不可重复	不可重复
简单通路	Simple Path	可重复	不可重复
简单回路	Simple Circuit	可重复 (起点终点相同)	不可重复

初级回路	Elementary Circuit	不可重复 (起点终点相同)	不可重复
------	--------------------	---------------	------

2) 通路 & 回路的符号表示

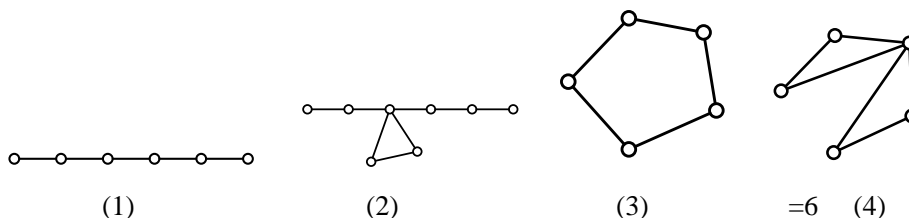
① 按定义用顶点和边的交替序列： $\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_l v_l$ 表示从 v_0 到 v_l 的通路，长度为 l (边的条数)。适用于所有图，是定义层面的标准表示。

② 用边序列简化表示： $\Gamma = e_1 e_2 \dots e_l$ ，前提是每条边的端点可通过边的定义唯一确定 (即已知边与顶点的关联关系)。

③ 简单图中的顶点序列表示： $\Gamma = v_0 v_1 \dots v_l$ ，因为简单图中无平行边，任意两个相邻顶点之间仅有一条边。

在 3 种通路表示形式中，若终点与起点重合即可表示回路。

例 7.13: 判断下面路径类型



解:

图(1)边不重复，是初级通路；顶点不重复，也是简单通路。

图(2)边不重复，是简单通路；但顶点重复，因此不是初级通路。

图(3)起点 = 终点，边不重复是初级回路也是简单回路。

图(4)边不重复，是简单通路；不是初级通路 (因为顶点重复)，也不是复杂通路 (因为边没有重复)。

7.2.2 无向图的连通性

无向图的连通性主要从顶点间的可达性、图的整体连通性以及连通分支数三个维度，刻画顶点之间的连通关系、图的整体连接状态与内部结构划分，从而完整描述无向图的连通结构。

1) 无向图的连通性与连通分支

定义 7.18: 无向图的连通性与连通分支

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $u, v \in V$ 。

(1) 顶点连通: 若 u 与 v 之间存在通路，则称 u 与 v 连通。规定顶点与自身总是连通。

(2) 连通图: 若图 G 中任意两个顶点都连通，则称 G 为连通图。平凡图 (只有一个顶点、无边) 是连通图。

(3) 连通关系: 令 $R = \{ \langle u, v \rangle \mid u, v \in V \text{ 且 } u \text{ 与 } v \text{ 连通} \}$ ，称 R 为顶点集 V 上的连通关系。连通关系 R 是等价关系。

(4) 连通分支: 顶点集 V 关于连通关系 R 的等价类所对应的导出子图，称为图 G 的连通分支。设 $V/R = \{ V_1, V_2, \dots, V_k \}$, G 的连通分支为 $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$ 。

(5) 连通分支数: 连通分支的个数记作 $p(G)$ 。 G 是连通图 $\Leftrightarrow p(G) = 1$ 。

引入连通、连通图、连通关系、连通分支等概念，是为了刻画无向图的整体连接结构，判断图中顶点之间是否可达、图是否连成一体，并把一个不连通的图分解成若干个互不相连的极大连通子图，从而便于对图的结构进行分析、分类与研究。

1) 无向图顶点间的短程线与距离

在顶点连通性基础上，短程线与距离可定量刻画顶点间的远近关系，给出两点间最短通路的长度，为图的路径优化、连通程度度量、中心性分析等后续研究提供基本度量工具。

定义 7.19: 短程线与距离

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$, $u,v\in V$ 。

短程线: 若 u 与 v 连通, 则称 u 与 v 之间长度最短的通路为 u 与 v 之间的短程线。

距离: 称 u 与 v 之间短程线的长度为 u 与 v 的距离, 记作 $d(u,v)$ 。

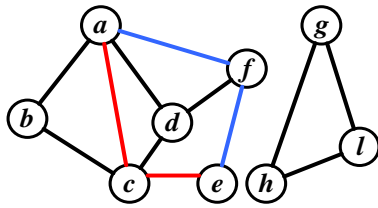
若 u 与 v 不连通, 则规定 $d(u,v)=\infty$ 。

距离的性质:

设 u,v,w 为无向图中任意顶点, 则距离函数 $d(u,v)$ 满足:

- (1) 非负性 $d(u,v)\geq 0$, 且 $d(u,v)=0 \Leftrightarrow u=v$
- (2) 对称性 $d(u,v)=d(v,u)$
- (3) 三角不等式 $d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$

例如, 在下图中, a 与 e 之间的短程线为 ace,afe ; $d(a,e)=2, d(a,h)=\infty$



3) 点割集、割点、边割集与割边 (桥)

点割集、割点、边割集与割边 (桥) 定量刻画图的连通强度, 识别维持图连通的关键顶点与关键边。是衡量图连通程度、可靠性、脆弱性的核心概念。

定义 7.20: 图的删除运算及符号约定

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$, $v\in V$, $V'\subseteq V$, $e\in E$, $E'\subseteq E$ 。

删除顶点 v : $G-v$ 是 G 的子图, 顶点集为 $V-\{v\}$, 边集为 G 中所有不与 v 关联的边。

删除顶点集 V' : $G-V'$ 是 G 的子图, 顶点集为 $V-V'$, 边集为 G 中所有不与 V' 中顶点关联的边。

删除边 e : $G-e$ 是 G 的子图, 顶点集仍为 V , 边集为 $E-\{e\}$ 。

删除边集 E' : $G-E'$ 是 G 的子图, 顶点集仍为 V , 边集为 $E-E'$ 。

定义 7.21: 点割集、割点、边割集与割边 (桥)

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为连通无向图, $p(G)$ 为连通分支数。

- (1) 点割集 (vertex cut): 设 $V'\subset V$, 若 $p(G-V')>p(G)$, 则称 V' 为 G 的点割集。
- (2) 极小点割集 (minimal vertex cut): 若 V' 是点割集, 且其任意真子集 $V''\subset V'$ 都不是点割集, 即 $\forall V''\subset V', p(G-V'')=p(G)$, 则称 V' 为极小点割集。
- (3) 割点 (cut vertex / articulation point): 若 $\{v\}$ 是点割集, 则称 v 为割点。(割点 \Leftrightarrow 单点极小点割集)

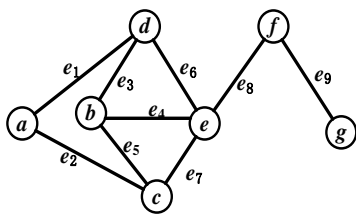
(4) 边割集 (edge cut) : 设 $E' \subseteq E$, 若 $p(G-E') > p(G)$, 则称 E' 为 G 的边割集。

(5) 极小边割集 (minimal edge cut) : 若 E' 是边割集, 且其任意真子集 $E'' \subset E'$ 都不是边割集, 即 $\forall E'' \subset E', p(G-E'') = p(G)$, 则称 E' 为极小边割集。

(6) 割边 / 桥 (cut edge / bridge) : 若 $\{e\}$ 是边割集, 则称 e 为割边 (桥)。(桥 \Leftrightarrow 单边极小边割集)

点割集是删除后能使图不连通的顶点子集, 极小点割集是满足“不能再少删任何顶点”的点割集, 割点就是由单个顶点构成的极小点割集; 边割集是删除后能使图不连通的边子集, 极小边割集是满足“不能再少删任何边”的边割集, 桥就是由单条边构成的极小边割集。

例 7.14: 判别图 G 的点割集、割点、边割集与割边



解: 图是连通图 ($p(G)=1$), 顶点集 $V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, 边集 $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9\}$ 。

割点: e, f

$\{e\}$ 、 $\{f\}$ 、 $\{e, f\}$ 、 $\{b, e\}$ 、 $\{c, d\}$ 等都是点割集; $\{e\}$ 、 $\{f\}$ 是极小点割集。

桥 (割边): e_8, e_9

$\{e_8\}$ 、 $\{e_9\}$ 、 $\{e_4, e_5, e_6\}$ 、 $\{e_8, e_9\}$ 、 $\{e_4, e_6, e_7, e_8\}$ 等都是边割集; $\{e_8\}$ 、 $\{e_9\}$ 、 $\{e_4, e_6, e_7\}$ 是极小边割集。 $\{e_4, e_6, e_7\}$ 是极小边割集, 是因为它的任何真子集都不是边割集, 删了图依然连通。

4) 图的连通强度

点连通度与边连通度从图的连通强度维度对图进行刻画, 用于量化评估图的抗破坏能力与容错性, 分别表示使图不连通所需要删除的最少顶点数和最少边数。

定义 7.22: 点连通度与边连通度

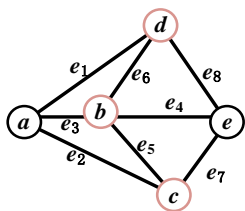
设 $G=\langle V, E \rangle$ 为无向连通图。

(1) 图 G 的点连通度 $\kappa(G)$ 定义为: $\kappa(G)=\min\{|V'| \mid V' \text{ 是 } G \text{ 的点割集, 或 } G-V' \text{ 为平凡图}\}$

(2) 图 G 的边连通度 $\lambda(G)$ 定义为: $\lambda(G)=\min\{|E'| \mid E' \text{ 是 } G \text{ 的边割集}\}$ 。

例如, 在下图中, 不存在大小为 1 的点割集。最小点割集大小为 2 (例如 $\{a, b\}$ 或 $\{d, e\}$ 等), 因此 $\kappa(G)=2$ 。

例 7.15: 求图的点连通度与边连通度



解:

① 不存在大小为 1 的点割集; 所有二元顶点集都无法使图不连通, 也不存在大小为 2 的点割集。删除 $\{d, b, c\}$ 或 $\{a, b, e\}$ 时, 图不连通, 存在大小为 3 的点割集。

②任意删除 1 条边图仍连通, 无桥, 不存在大小为 1 的边割集。删除所有可能的 2 条边组合, 均无法使图不连通, 不存在大小为 2 的边割集。删除 a 、 d 、 e 的全部 3 条邻接边都可以使其孤立, 图不连通。

结论: $\kappa(G)=3$; $\lambda(G)=3$ 。

5) 特殊图的点连通度与边连通度

(1) 若 G 是平凡图, 则 $\kappa(G)=0$, $\lambda(G)=0$ 。

平凡图只有一个顶点、无边, 无法再分割, 规定连通度为 0。

(2) 若 G 是完全图 K_n , 则 $\kappa(G)=n-1$, $\lambda(G)=n-1$ 。

完全图没有点割集和边割集, 只能删至平凡图, 需删 $n-1$ 个点或边。

(3) 若 G 中存在割点, 则 $\kappa(G)=1$; 若 G 中存在割边, 则 $\lambda(G)=1$ 。

割点、割边只需删除 1 个点 / 1 条边即可使图不连通, 最小破坏数为 1。

(4) 规定非连通图的点连通度和边连通度均为 0。

图本身已不连通, 无需删除任何点或边, 最小破坏数为 0。

6) 点连通度、边连通度与最小度的关系定理 (Whitney 不等式)

定理 7.3: 连通度与最小度的关系定理

对任意无向图 G , 其点连通度 $\kappa(G)$ 、边连通度 $\lambda(G)$ 和最小度 $\delta(G)$ 满足 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

也就是说, 要使图不连通, 至少需要删除 $\kappa(G)$ 个顶点, 而删除这些顶点至少会同时删除 $\lambda(G)$ 条边, 因此 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ 。最小度顶点只有 $\delta(G)$ 条关联边, 删除这些边即可孤立该顶点, 使图不连通, 因此边连通度 $\lambda(G)$ 不会超过最小度 $\delta(G)$, 即 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。该定理给出了点连通度、边连通度与最小度的大小约束关系, 用于快速估计、验证连通度取值, 并从整体上刻画图的连通强度与顶点度数之间的联系。

7.2.3 有向图的连通性与连通度

本节围绕连通性与连通程度展开, 从任意两点是否单向可达、相互可达, 到整体图的连通结构, 依次给出弱连通、单向连通、强连通的定义与判定。其目的是刻画有向图的连通紧密程度, 揭示顶点间可达关系的整体性质, 为后续图的结构分析、回路与通路研究奠定基础。

1) 有向图的连通性及其强弱等级

定义 7.23: 有向图顶点的可达与相互可达

设有向图 $D=\langle V, E \rangle$, $u, v \in V$ 。若从 u 到 v 存在通路, 则称 u 可达 v , 规定每个顶点到自身总是可达的。若 u 可达 v 且 v 可达 u , 则称 u 与 v 相互可达。

定义 7.24: 有向图的连通性

设有向图 $D=\langle V, E \rangle$ 。

若略去各边方向所得无向图连通, 则称 D 为弱连通图;

若对任意 $u, v \in V$, u 可达 v 或 v 可达 u , 则称 D 为单向连通图;

若对任意 $u, v \in V$, u 与 v 相互可达, 则称 D 为强连通图。

定理 7.4: 有向图连通性的等价条件

设有向图 $D=\langle V, E \rangle$ 。

D 是强连通图当且仅当 D 中存在经过所有顶点的回路；
 D 是单向连通图当且仅当 D 中存在经过所有顶点的通路。

这组定义与定理，以可达关系为基础，从局部到整体，刻画有向图的连通性及其强弱等级，并给出对应的结构特征与判定条件。

2) 有向图中顶点间的短程线与距离

定义 7.25: 短程线与距离

设有向图 $D=(V,E)$, $u,v \in V$, 且 u 可达 v 。从 u 到 v 长度最短的通路称为 u 到 v 的短程线。短程线的长度称为 u 到 v 的距离，记作 $d(u,v)$ ，若 u 不可达 v ，规定 $d(u,v)=\infty$ 。

距离函数 $d(u,v)$ 的性质：

设 $D=(V,E)$ 为有向图， $u,v,w \in V$ ，距离函数 $d(u,v)$ 满足：

- (1) 非负性 $d(u,v) \geq 0$ ，并且 $d(u,v)=0 \Leftrightarrow u=v$ 。
- (2) 三角不等式 $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$ 。

注意：有向图中的距离不具有对称性，即一般 $d(u,v) \neq d(v,u)$ 。短程线与距离把有向图的“可达”从定性判断变为定量度量。

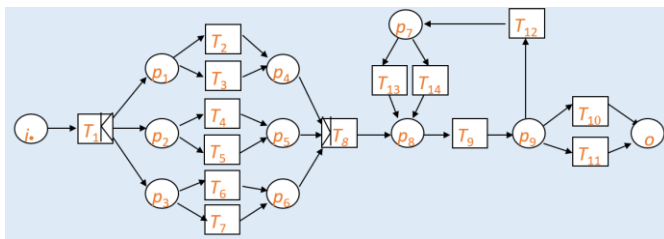
3) 有向图的应用实例-业务过程建模

业务过程建模 (Business Process Modeling, BPM) 是对业务活动、顺序、依赖关系的抽象与表示。在形式化建模中，它的基础是有向图，核心形式化工具是 Petri 网，而 WF-net (工作流网) 是专门用于业务过程建模的一类 Petri 网。有向图作为业务过程的直观图形基础，用顶点表示活动 / 状态，有向边表示业务的先后顺序或流转关系，可直观描述业务过程的执行顺序、可达性、连通性。

WF-net (Workflow Net) 在 Petri 网的基础上增加了对工作流特有的支持，业务流程中的执行顺序、依赖关系、可达性、执行路径这些核心环节与有向图连通性、路径、可达性对应。使得 WF-net 称为专门用于建模工作流程 (workflow) 建模的有效方法。

Petri 网是一种数学建模语言，它由位置 (Place)、转换 (Transition) 和令牌 (Token) 组成，能够精确地描述和分析复杂的系统动态。

例 7.16: 建立论文评审业务的 WF-net 模型



T_1 : 收到论文，邀请三个评审人；

T_2, T_4, T_6, T_{13} : 及时得到评审意见；

T_3, T_5, T_7, T_{14} : 没按时收到评审意见；

T_8 : 汇总评审意见；

T_9 : 决定是否接受论文；

T_{10} : 接受论文；

T_{11} : 不接受论文;

T_{12} : 再邀请其他评审人

解:

(1) 根据业务描述与图示, 确定库所 (Place) 和 变迁 (Transition) 的业务含义:

元素	类型	业务含义
i	库所	初始库所 (论文待处理)
o	库所	终止库所 (论文处理完成)
p_1, p_2, p_3	库所	三个评审人已邀请, 等待反馈
p_4, p_5, p_6	库所	单个评审人反馈完成 (及时 / 超时)
p_7	库所	存在未按时反馈的评审人, 需补邀
p_8	库所	所有评审意见已汇总完成
p_9	库所	论文待最终决策
T_1	变迁	收到论文, 邀请 3 位评审人 (并行分叉)
T_2, T_4, T_6, T_{13}	变迁	评审人及时反馈意见
T_3, T_5, T_7, T_{14}	变迁	评审人未按时反馈意见
T_8	变迁	汇总所有评审意见 (并行汇合)
T_9	变迁	基于汇总意见做接受 / 拒稿决策
T_{10}	变迁	接受论文
T_{11}	变迁	拒绝论文
T_{12}	变迁	补邀新评审人 (替换未反馈者)

(2) 完整 WF-net 结构定义

四元组定义: $N=(P,T,F,M_0)$

库所集合 $P=\{i, o, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9\}$

变迁集合 $T=\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}\}$

流关系 F (核心连接如下):

初始分叉: $i \rightarrow T_1, T_1 \rightarrow p_1, T_1 \rightarrow p_2, T_1 \rightarrow p_3$

评审反馈分支:

$p_1 \rightarrow T_2, p_1 \rightarrow T_3; T_2 \rightarrow p_4, T_3 \rightarrow p_4$

$p_2 \rightarrow T_4, p_2 \rightarrow T_5; T_4 \rightarrow p_5, T_5 \rightarrow p_5$

$p_3 \rightarrow T_6, p_3 \rightarrow T_7; T_6 \rightarrow p_6, T_7 \rightarrow p_6$

补邀评审分支:

$p_7 \rightarrow T_{13}, p_7 \rightarrow T_{14}; T_{13} \rightarrow p_8, T_{14} \rightarrow p_8$

$T_{12} \rightarrow p_7, T_3, T_5, T_7, T_{14} \rightarrow T_{12}$

汇合与决策:

$p_4 \rightarrow T_8, p_5 \rightarrow T_8, p_6 \rightarrow T_8; T_8 \rightarrow p_8$

$p_8 \rightarrow T_9; T_9 \rightarrow p_9$

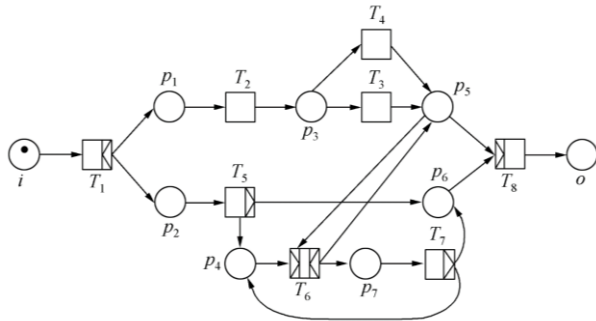
$p_9 \rightarrow T_{10}, p_9 \rightarrow T_{11}; T_{10} \rightarrow o, T_{11} \rightarrow o$

初始标识 M_0 : 仅初始库所 i 含 1 个托肯, 其余库所为 0。

(3) 按照 WF-net 中主要包含 4 种变迁类型, 绘制论文评审流程模型图:

变迁类型	图形符号	业务含义
起始变迁	无入边, 仅出边到库所	流程启动 (对应 T_1)
分叉变迁 (AND-split)	一个入边, 多个出边 (并行)	并行邀请 3 位评审人 (T_1)
选择变迁 (XOR-split)	一个入边, 多个出边 (互斥)	评审人选择「及时反馈」或「超时」
汇合变迁 (AND-join)	多个入边, 一个出边 (同步)	汇总所有评审意见 (T_8)
决策变迁 (XOR-join)	多个入边, 一个出边 (互斥)	论文接受 / 拒稿选择
终止变迁	仅入边, 无出边	流程结束 (T_{10}, T_{11})

(3) 绘制 WF-net 模型图



(4) 自动生成 WF-net 模型图的主流工具

工具	输入	输出	适合场景
WoPeD	BPMN / 流程结构	规范 WF-net 图 + 健全性检查	作业、论文、标准建模
ProM	事件日志 / BPMN	自动挖掘的 WF-net 模型	流程挖掘、真实业务
AI+ Graphviz	自然语言流程	DOT 代码 → 自动 WF-net 矢量图	快速出图
AI + TikZ	自然语言流程	LaTeX 代码 → 高规范 WF-net	学术论文
DiagramGPT	自然语言流程	在线直接显示 WF-net 示意图	快速演示、草图

7.3 图的矩阵表示

图的矩阵表示是借助矩阵这一代数结构, 将抽象的图结构映射为规范的数值矩阵, 实现了图的数学化与符号化描述, 搭建起图论结构与线性代数之间的桥梁, 从而把图的结构分析问题转化为可直接计算的矩阵运算问题。

7.3.1 无向图的关联矩阵

1) 无向伪图关联矩阵

定义 7.26: 无向图关联矩阵

设无向图 $G=\langle V,E \rangle$ 为无向图, 顶点集 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边集 $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 。

G (关于此顶点、边顺序) 的关联矩阵是一个 $n \times m$ 矩阵 $M(G)=[m_{ij}]$

其中, $m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若边 } e_j \text{ 与顶点 } v_i \text{ 关联;} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$

若 G 是伪图 (允许环、重边), 则 m_{ij} =顶点 v_i 与边 e_j 的关联次数, 此时 $m_{ij} \in \{0,1,2\}$ (环对应取值为 2)。

无向图的关联矩阵中, 每一行对应一个顶点, 每一列对应一条边。若某条边与顶点相关联, 则对应位置记为 1, 不关联则记为 0。对于无向伪图, 顶点上的环在对应位置记为 2, 多重边则作为多条独立边, 分别用不同列表示。

2) 无向伪图关联矩阵性质

设无向伪图 G 含有 n 个顶点 m 条边, 其关联矩阵记为 $M = [m_{ij}]_{n \times m}$, $m_{ij} \in \{0,1,2\}$ 。该关联矩阵具备以下 6 条核心性质, 且每条性质均为充要条件, 可直接用于图结构的判定与验证:

(1) 列元素和恒为 2

对任意一列 j ($j = 1, 2, \dots, m$), 满足 $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 2$ 。

(2) 行元素和等于顶点度数

对任意一行 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 满足 $\sum_{j=1}^m m_{ij} = d(v_i)$, 其中 $d(v_i)$ 表示顶点 v_i 的度数。

关联矩阵的行元素之和精准对应顶点的关联边总数, 环在计算时贡献 2 度, 普通边和多重边各贡献 1 度, 完全贴合顶点度数的定义, 可直接通过行和快速计算顶点度数。

(3) 全矩阵元素和等于边数的 2 倍

矩阵所有元素求和满足 $\sum_{ij} m_{ij} = 2m$ 。

该性质由前两条推导而来, 本质是无向图的握手定理的矩阵表达, 所有顶点度数之和等于图中总边数的 2 倍, 环和多重边均遵循这一核心定理, 可用于快速校验关联矩阵元素计算是否正确。

(4) 多重边对应相同列

边 e_j 与边 e_k 为平行重边 \Leftrightarrow 关联矩阵的第 j 列与第 k 列完全相同。

平行重边连接的是完全相同的一对顶点, 因此在关联矩阵中对应的列元素取值完全一致, 这也是判定伪图中是否存在多重边的直接依据。

(5) 孤立点对应全零行

顶点 v_i 为孤立点 \Leftrightarrow 关联矩阵的第 i 行所有元素全为 0。

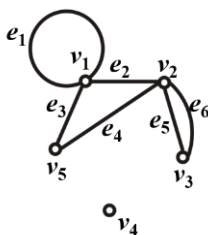
孤立点不与任何边相关联, 因此该行无任何取值为 1 或 2 的元素, 通过扫描全零行即可快速定位图中的孤立顶点, 直观反映顶点的边关联状态。

(6) 环对应单列单 2 元素

边 e_j 为环 \Leftrightarrow 关联矩阵的第 j 列中恰有一个元素为 2, 其余所有元素均为 0。

环是依附于单个顶点的闭合边, 仅在该顶点对应行处取值为 2, 其余行均为 0, 区别于普通边和多重边的列特征, 可快速区分环与普通边、多重边。

例 7.17: 将无向图用关联矩阵表示



解:

- (1) 根据顶点集（行数）和边集（列数）确定矩阵规模为 5×6 矩阵 $M=(m_{ij})$ 。
- (2) 按边逐列构造矩阵，根据定义，对每一条边 e_j 依次赋值构造矩阵 $M(G)$ 。

$$M(G) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 校验：每一列和等于 2；每一行和等于该顶点度数；总度数等于 2 乘边数，等于 12（握手定理）；边 e_1 为 v_1 自环：第 1 行第 1 列为 2。

7.3.2 有向无环图的关联矩阵

1) 有向图关联矩阵

定义 7.27: 有向图关联矩阵

设 $D=\langle V, E \rangle$ 为一不含环的有向图，其中顶点集 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，边集 $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ，且边均为有向边（不包含无向边、环或多重边）。

定义 $n \times m$ 矩阵 $M(D)=[m_{ij}]$ ，其中元素 m_{ij} 取值如下：

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若顶点 } v_i \text{ 是边 } e_j \text{ 的起点} \\ -1, & \text{若顶点 } v_i \text{ 是边 } e_j \text{ 的终点} \\ 0, & \text{若顶点 } v_i \text{ 与边 } e_j \text{ 不关联} \end{cases}$$

则称矩阵 $M(D)=[m_{ij}]$ 为有向图 D 的关联矩阵。

与无向图关联矩阵仅用 1 标记顶点与边的关联关系不同，有向图关联矩阵以 1 标记边的起点、-1 标记边的终点、0 标记无关联。其取值差异严格区分边的流向，完整保留有向图的方向语义，且每行元素之和对应顶点的出度与入度之差。

该关联矩阵定义专门针对简单有向图，其所刻画的有向图具有以下特征：仅由有向边构成，不含无向边，不含环，也不含平行多重边。因此，该定义不适用于含有环、多重有向边或同时包含无向边的混合图。

2) 有向图关联矩阵的性质

设 $M(D)=[m_{ij}]$ 为有向图 D 的关联矩阵，则：

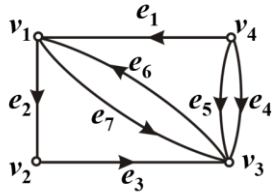
- (1) 矩阵中每一列恰好含有一个 1 和一个 -1，其余元素均为 0。
- (2) 矩阵中所有 1 的总个数与所有 -1 的总个数相等，且均等于图的边数 m 。

(3) 第 i 行中 1 的个数等于顶点 v_i 的出度 $d^+(v_i)$, 第 i 行中 -1 的个数等于顶点 v_i 的入度 $d^-(v_i)$ 。

(4) 两条边 e_j 与 e_k 为平行边, 当且仅当关联矩阵中第 j 列与第 k 列完全相同。

有向图中的环在关联矩阵中对应列元素全为 0, 会破坏 “每列恰含一个 1 和一个 -1” 的基本性质, 因此标准的有向图关联矩阵定义与性质, 均默认不含环。

例 7.18: 有向图的关联矩阵表示



解:

(1) 定义矩阵规模: 共 4 个顶点, 7 条有向边, 关联矩阵 $M(G)$ 是 4×7 矩阵。

(2) 赋值规则: 对每条有向边, 起点行赋值为 -1, 表示 “流出”; 终点行赋值为 +1, 表示 “流入”; 其余行赋值为 0, 表示无关联。

(3) 按边逐列构造按边逐列构造 $M(G)$, 行顺序为: $v_1 \sim v_4$; 列顺序为: $e_1 \sim e_7$ 。

$$M(D) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4) 校验: 每列和为 0, 符合有向边 “流出 = 流入” 的守恒性; 行和 = 入度 - 出度。

7.3.3 邻接矩阵

关联矩阵描述顶点与边的关联关系, 体现边如何 “连接” 顶点, 其维度为顶点 (行) \times 边 (列)。邻接矩阵描述顶点与顶点的连接关系, 刻画两个顶点之间是否相邻、有几条边、边权多少, 其维度为顶点 (行) \times 顶点 (列)。

1) 有向图的邻接矩阵

定义 7.28: 有向图的邻接矩阵

设有向图 $D = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 的边数, 称 $[a_{ij}^{(1)}]_{n \times n}$ 为 D 的邻接矩阵, 记作 $A(D)$, 简记作 A 。

有向图邻接矩阵的特性:

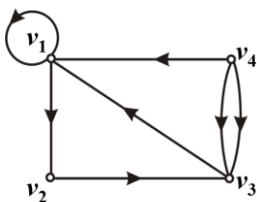
(1) 第 i 行和等于顶点 v_i 的出度: $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$

(2) 第 j 列和等于顶点 v_j 的入度: $\sum_{i=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$

(3) 矩阵所有元素之和等于图中边的总数: $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$

(4) 主对角线元素之和 (迹) 等于图中环 (自环) 的个数: $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(1)} = D$ 中环 (自环) 的个数。

例 7.19: 有向图 D 的邻接矩阵表示



解:

(1) 明确图的顶点与边, 共 4 个顶点 $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$;

(2) 根据有向图邻接矩阵定义, 设 $A=(a_{ij}^{(1)})_{4 \times 4}$, $a_{ij}^{(1)}$ 表示为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 的条

数。得到邻接矩阵: $A(D) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(3) 验证邻接矩阵特性:

行和 = 出度: $\deg^+(v_1)=2$ 、 $\deg^+(v_2)=1$ 、 $\deg^+(v_3)=1$ 、 $\deg^+(v_4)=3$

列和 = 入度: $\deg^-(v_1)=3$ 、 $\deg^-(v_2)=1$ 、 $\deg^-(v_3)=3$ 、 $\deg^-(v_4)=0$

总边数: $1+1+1+1+1+2=7$ (和矩阵元素总和一致)

自环数: 对角线和 = 1。

2) 有向图通路计数定理

定理 7.5: 通路计数定理

设 A 为 n 阶有向图 D 的邻接矩阵, 则对任意正整数 $l \geq 1$,

(1) A^l 中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 等于 D 中从顶点 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路 (含回路) 条数;

(2) $a_{ii}^{(l)}$ 等于从顶点 v_i 到自身长度为 l 的回路条数;

(3) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(l)}$ 等于 D 中长度为 l 的通路 (含回路) 总数;

(4) $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(l)}$ 等于 D 中长度为 l 的回路总数。

有向图通路计数定理以邻接矩阵为基础, 通过对其进行幂运算 A^l , 将图中原本需要逐条枚举的路径计数问题, 转化为简洁的矩阵代数计算。矩阵幂中每个元素直接对应两点间指定长度的通路数或顶点到自身的回路数, 由此可快速得到图中所有同长度通路和回路的总数, 实现对图结构连通性与路径分布的高效分析。

通路计数推论:

设 $B_l = A + A^2 + \dots + A^l (l \geq 1)$, 则

(1) B_l 中元素 $b_{ij}^{(l)}$ 等于 D 中 v_i 到 v_j 长度小于等于 l 的通路 (含回路) 条数,

(2) $b_{ii}^{(l)}$ 等于 D 中 v_i 到自身长度小于等于 l 的回路条数;

(3) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(l)}$ 等于 D 中长度小于等于 l 的通路 (含回路) 总数;

(4) $\sum_{i=1}^n b_{ii}^{(l)}$ 等于 D 中长度小于等于 l 的回路总数。

该推论是有向图通路计数定理的直接延伸, 通过将邻接矩阵各次幂累加得到矩阵 B_l , 把长度 $\leq l$ 的所有通路和回路统一计数, 从而快速判断两点间是否可达、顶点自身是否存在回路, 并统计图中短程路径总数, 为判断有向图的连通性、可达性提供更实用的代数依据。

例 7.20: 求例 7.19 中有向图 D 的 3 次幂累加得到矩阵 B_3 。

解:

$$(1) \text{ 确认邻接矩阵 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \text{ 计算 } A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \text{ 计算 } A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A^3 是图中所有长度恰好为 3 的路径数量矩阵, 是通路计数定理在 $l=3$ 时的直接体现。例如: $a_{11}^{(3)}=2$ 表示从 v_1 到 v_1 长度为 3 的回路有 2 条; $a_{41}^{(3)}=3$ 表示从 v_4 到 v_1 长度为 3 的通路有 3 条; 第 4 列都为 0 表示没有任何顶点能通过长度为 3 的路径到达 v_4 。

$$(4) \text{ 计算 } B_3 = A + A^2 + A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(5) 分析 B_3 中的通路和回路数量

B_3 完整统计了图中所有长度 ≤ 3 的通路和回路数量。 v_4 到 v_1 的短程路径最丰富, v_4 自身无回路, 也无任何顶点能到达 v_4 。

顶点到自身长度 ≤ 3 的回路数: $b_{11}^{(3)}=4, b_{22}^{(3)}=1, b_{33}^{(3)}=1, b_{44}^{(3)}=4$

图中长度 ≤ 3 的回路总数 $= 4+1+1+0=6$

图中长度 ≤ 3 的通路总数 $= 4+3+2+2+1+1+3+2+1+7+4+3=34$ 。

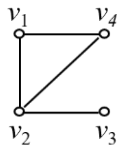
3) 无向图的邻接矩阵

定义 7.29: 无向图的邻接矩阵

设无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, 顶点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 与 v_j 之间边的条数, 称 $A = [a_{ij}^{(1)}]_{n \times n}$ 为 G 的相邻矩阵, 记作 $A(G)$ 。

有向图与无向图的邻接矩阵均以顶点为行、列下标, 用矩阵元素表示顶点间边的数量, 核心区别在于方向性与对称性。无向图不区分边的方向, 邻接矩阵满足 $a_{ij} = a_{ji}$, 必为对称矩阵; 有向图严格区分边的起点与终点, a_{ij} 表示 v_i 到 v_j 的有向边数, 矩阵通常不对称。二者均可用矩阵幂统计指定长度的通路和回路, 只是无向图中一条边可双向通行, 而有向图路径严格遵循箭头方向。

例 7.21: 编写无向图 G 的邻接矩阵



解:

(1) 确定顶点顺序与矩阵维度: 顶点集合 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 矩阵维度为 4×4

(2) 依据图结构、按照无向图邻接矩阵定义填充元素。若顶点 v_i 与 v_j 之间有边，则令 $a_{ij} = a_{ji} = 1$ （对称填充），否则为 0。

(3) 写出最终邻接矩阵并验证

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对称性验证：无向图的邻接矩阵必须是对称矩阵，即 $a_{ij} = a_{ji}$ ；

对角线元素验证：无向简单图中不存在自环，因此对角线元素 a_{ii} 必须为 0；

度数验证：无向图中顶点 v_i 的度数等于邻接矩阵第 i 行（或第 i 列）所有元素之和。

4) 简单无向图的通路计数定理

简单无向图与有向图的通路计数定理形式与计算规则完全相同，均通过邻接矩阵幂 A^l 统计指定长度的通路与回路数量。无向图邻接矩阵及其幂均对称，两点间双向通路数必相等，一条边可双向构成通路，而有向图矩阵一般不对称，两点间通路数可不同，路径必须严格遵循边的方向，不可反向通行。

5) 非无向简单图的邻接矩阵

非无向简单图（多重图、带自环图）的邻接矩阵，本质是简单图定义的自然推广。只需将 a_{ij} 的含义从“是否有边”修改为“有几条边”；将 a_{ii} 的含义从“恒为 0”修改为“自环的数量”。对称性、矩阵幂运算的通路计数意义等核心性质完全保持不变。

7.3.4 可达矩阵

邻接矩阵记录直接相邻关系，用于精确计数通路。可达矩阵是把复杂的路径计数问题简化为“能到达 / 不能到达”的二元判断，从而快速、直观地分析有向图或无向图的整体连通结构。

1) 可达矩阵的定义

定义 7.30: 可达矩阵

设图 $G=(V,E)$ 为有向图或无向图，顶点集 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。

定义 n 阶方阵 $P = [p_{ij}]_{n \times n}$ ，其中 $p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 存在通路} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$ 。

称 P 为图 G 的可达矩阵，记作 $P(G)$ ，简记为 P 。

2) 可达矩阵的性质

(1) $P(G)$ 主对角线上元素全为 1，即对任意 i ，有 $p_{ii}=1$ 。

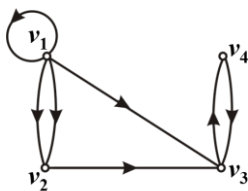
(2) 无向图的可达矩阵必为对称矩阵。

(3) 无向图 G 连通当且仅当 P 的所有元素全为 1。

(4) 有向图 D 强连通 当且仅当 $P(D)$ 中所有元素全为 1。

(5) 对 n 阶图， $p_{ij}=1 \Leftrightarrow$ 从 v_i 到 v_j 存在长度不超过 $n-1$ 的通路 ($i \neq j$)。

例 7.22: 针对图，求解下列问题



- (1) v_1 到 v_4 , v_4 到 v_1 长为 3 的通路各有多少条?
- (2) v_1 到自身长为 1,2,3,4 的回路各有多少条?
- (3) 长为 4 的通路共有多少条?其中有多少条回路?
- (4) 长度小于等于 4 的回路共有多少条?
- (5) 写出 D 的可达矩阵, 并问 D 是强连通的吗?

解:

- (1) 先写出邻接矩阵 A , 顶点顺序为 v_1 到 v_4 .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (2) 计算邻接矩阵幂 A^2, A^3, A^4

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (3) 求可达矩阵 $P = A \vee A^2 \vee A^3 \vee A^4$ 得到 (元素 > 0 则为 1)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (4) 根据邻接矩阵回到通路数, 根据可达矩阵回答连通性。

v_1 到 v_4 长为 3 的通路有 3 条; v_4 到 v_1 长度为 3 的通路为 0 条;

v_1 到自身长为 1,2,3,4 的回路分别有 1,1,1,1 条;

长为 4 的通路共有 $1+2+6+4+1+1+1=15$ 条, 其中回路有 3 条;

长度小于等于 4 的回路共有 $1+3+1+3=8$ 条;

D 的可达矩阵 P , 不是全 1 矩阵, v_2, v_3, v_4 无法到达 v_1 , v_3, v_4 无法到达 v_2 , 因此该有向图 D 不是强连通图。

求可达矩阵时, 先根据图写出其邻接矩阵 A , 再依次计算从 A 到 A^n 的各次矩阵幂 (n 为图的顶点数), 将这些矩阵对应位置的元素进行逻辑或运算, 非零元素记为 1、全零记为 0, 并将主对角线元素统一置为 1 (自身天然可达), 最终得到的 0-1 矩阵即为该图的可达矩阵。图论里约定顶点到自身天然可达, 不需要任何边。自环仅影响指定长度的通路和回路数量, 不改变顶点自身可达这一结论。

7.4 图的若干特殊类型

二部图、欧拉图、哈密顿图与平面图是图论中极具代表性的四类特殊图。其中, 二部图具有规整的顶点划分结构, 是匹配理论的核心研究对象; 欧拉图聚焦边的遍历问题, 构成图论中

经典的遍历模型；哈密顿图以顶点遍历为核心，是体现图论问题计算复杂度的重要标杆；平面图则从平面嵌入的几何拓扑性质入手，成为拓扑图论的核心研究内容。

7.4.1 二部图

二部图从顶点集划分与边的关联结构视角研究图，其顶点可划分为两个互不相交的子集，所有边仅存在于不同子集之间，同一子集内部无边相连。这类结构规整的图被广泛应用于匹配问题、任务分配、社交网络分析、电路设计及调度优化等模型中。

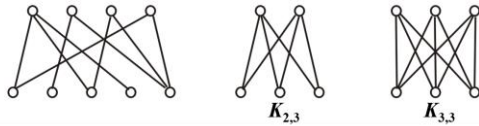
1) 无向二部图与完全二部图

定义 7.31: 无向二部图与完全二部图

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$ ，若可将顶点集 V 分成两个子集 V_1 与 V_2 ，满足 $V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\emptyset$ ，并且图 G 中每条边的两个端点分别属于 V_1 和 V_2 ，则称 G 为二部图，记作 $\langle V_1,V_2,E\rangle$ ，并称 V_1 与 V_2 为互补顶点子集。

若 G 为简单图，且 V_1 中每个顶点均与 V_2 中每个顶点相邻，则称 G 为完全二部图，记作 $K_{r,s}$ ，其中 $r=|V_1|$, $s=|V_2|$ 。

例如，下列图均是完全二部图。



2) 二部图的环特征

若无向图 G 为二部图，则 G 中不存在奇长度回路，所有回路均为偶长度回路。这是二部图典型的环特征。

二部图的环特征是指其所有回路均为偶长度，不存在奇长度回路，这也是二部图区别于普通无向图的核心标志。该特征不仅能快速判断一个图形是否为二部图（若存在奇长度回路，则必非二部图），还能为匹配问题、调度优化等实际应用提供坚实的理论支撑，与二部图的其他结构性性质相互印证，共同构成其完整的结构特征。

3) 判定二部图的充要条件

定理 7.6: 判定二部图的充要条件定理

无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 是二部图当且仅当 G 中不含长度为奇数的简单回路。

证明:

必要性: 设 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$ 是二部图，任取 G 中一条回路 $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n, v_0$ 不妨设 $v_0 \in V_1$ ，由二部图定义，每条边的两个端点分属 V_1 和 V_2 ，则依次有 $v_1 \in V_2, v_2 \in V_1, \dots$ 。由于回路终点 $v_0 \in V_1$ ，故终点前一个顶点 v_n 必属于 V_2 ，因此回路长度 n 必为偶数。综上， G 中无奇长度回路。

充分性: 已知 G 中没有奇长度的简单回路，需证明 G 是二部图。即能将顶点集 V 划分为两个子集 V_1, V_2 ，满足 $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ，且 G 中所有边均连接 V_1 与 V_2 中的顶点（同一子集内无边）。

(1) 取任一顶点 $u \in V$ ，令 $V_1 = \{v \mid v \in V \wedge d(v,u) \text{ 为偶数}\}$, $V_2 = \{v \mid v \in V \wedge d(v,u) \text{ 为奇数}\}$ ，该分类基于顶点到 u 的距离奇偶性，天然形成 V 的一个二分划分，且满足 $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 。

(2) 证明 V_1 内部无边 (即 V_1 中任意两顶点不相邻)。假设存在 $s, t \in V_1, e=(s, t) \in E$ 。设 P 是 u 到 s 的短程线, Q 是 u 到 t 的短程线, 则路径 P 后跟 $\{s, t\}$, 再沿路径 Q 返回 u , 构成一条回路 $P \cup e \cup Q$ 。由于 $s, t \in V_1, d(u, s)$ 和 $d(u, t)$ 均为偶数, 故回路长度为 $d(u, s) + d(u, t) + 1$ 必为奇数, 与“ G 中不含奇长度简单回路”的已知条件矛盾。因此 V_1 内部无边。

同理可证, V_2 中任意两顶点也不相邻。

综上, G 满足二部图的定义, 故 G 是二部图。

4) 二部图的匹配与完全匹配

二部图中的匹配, 是指图中一组不存在公共顶点的边集, 每条边的两个端点分别属于两个不同的顶点子集 V_1 和 V_2 。二部图的匹配与完全匹配理论, 可为实际场景中的资源分配、任务调度等问题提供重要的理论支撑。

定义 7.32: 二部图的匹配

设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ (其中 V_1, V_2 为顶点子集, E 为边集), 相关定义如下:

(1) 匹配: 设 $E' \subseteq E$, 若 E' 中的任意两条边都不相邻 (即无公共顶点), 则称 E' 是二部图 G 的匹配。

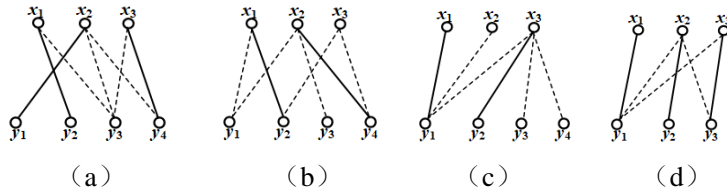
(2) 极大匹配: 若 E' 是 G 的匹配, 且在 E' 中任意添加一条 $E \setminus E'$ 中的边后, 所得的边子集不再是匹配, 则称 E' 是 G 的极大匹配。

(3) 最大匹配: 在二部图 G 的所有匹配中, 边数最多的匹配称为 G 的最大匹配。

(4) 完备匹配: 设 $|V_1| \leq |V_2|$, 若 G 的匹配 E' 满足 $|E'| = |V_1|$, 则称 E' 是 V_1 到 V_2 的完备匹配。

(5) 完美匹配: 当 $|V_1| = |V_2|$ 时, 该二部图的完备匹配称为完美匹配。

例 7.23: 在下列二部图 $G = (X, Y, E)$ 中, 图(a)、(b)、(c)的上部分 (左部) 顶点集为 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, 图(a)、(b)、(c)的下部分 (右部) 顶点集为 $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, 图(d)的顶点集为 $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ 。全边集为 E , 实线边集为匹配候选 M , 虚线边集为 $E \setminus M$ 。判定各图的匹配特性。



解:

(1) 图 (a) 匹配分析

① M 中 3 条边无任何公共顶点, 满足匹配定义, 是图 (a) 的一个合法匹配。

② 顶点集 X 已被 M 完全覆盖, 所有非匹配边的端点均已在 M 中, 添加任意一条非匹配边都会出现共顶点, 破坏匹配性质。结论: M 是极大匹配。

③ M 已饱和顶点集 X 中所有顶点, 不存在非饱和顶点, 因此无关于 M 的增广路。结论: M 是最大匹配, 同时是饱和左部的完备匹配。

④ 图 (a) 两部分顶点数不相等, 不满足完美匹配的必要条件, 且 y_3 未被 M 覆盖。结论: M 不是完美匹配, 且该图本身不存在完美匹配。

综合结论：实线边集 M 是该二部图的合法匹配、极大匹配、最大匹配，同时是饱和左部顶点集的完备匹配；因二部图两部分顶点数不相等， M 不是完美匹配，且该图本身不存在完美匹配。

(2) 图 (b) 匹配分析

实线边集 M 是该二部图的合法匹配。因为存在不属于 M 的边 (x_3, y_3) ，添加到 M 后仍为匹配，不满足极大匹配“加不动”的要求，所以 M 不是极大匹配。 M 只有 2 条边，而全图最多能找到 3 条边的匹配，边数没到上限，所以 M 也不是最大匹配。

(3) 图 (c) 匹配分析

实线边集 M 是该二部图的合法匹配。将不属于 M 的边 (x_2, y_3) 添加到 M 后， M 仍为匹配，这不满足极大匹配“加不动”的要求，因此 M 不是极大匹配。 M 只有 2 条边，而全图最多能找到 3 条边的匹配（边数未达全局上限），因此 M 不是最大匹配，同时 M 未饱和左部所有顶点，也不是完备匹配。

(4) 图 (d) 匹配分析

该实线边集 M 是图中一个合法匹配，且由于其已饱和左部所有顶点，无法再添加任何非匹配边而保持匹配性质，故 M 同时为极大匹配与最大匹配，并为覆盖左部顶点的完备匹配。因图中左右顶点数均为 3、且 M 覆盖了全部 6 个顶点， M 也是该图的完美匹配。

5) 完备匹配存在定理

找到二部图饱和左部顶点集 V_1 的完备匹配，可直接确定图的最大匹配，简化最大匹配的验证与构造流程。为了避免盲目枚举二部图所有可能的匹配，完备匹配存在定理（Hall 定理）给出了一个判断一个二部图是否存在饱和左部顶点集 V_1 的完备匹配的充要条件。

定理 7.7： Hall 定理（存在饱和左部顶点集 V_1 的完备匹配的充要条件）

设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ ，且 $|V_1| \leq |V_2|$ ，则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配，当且仅当： V_1 中任意 k ($1 \leq k \leq |V_1|$) 个顶点，至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻。

定理 7.8： t 条件判定完备匹配

设二部图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ ，且 $|V_1| \leq |V_2|$ 。若存在正整数 t ，使得 V_1 中每个顶点至少关联 t 条边，而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边（该条件称为 t 条件），则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配。

Hall 定理是判定二部图完备匹配的通用充要条件，覆盖所有可存在完备匹配的场景，判定严谨，但需逐一验证相关顶点的邻接关系。 t 条件定理是判定完备匹配的充分非必要条件，可直接判定存在完备匹配，其特点是判定简洁高效，无需逐一验证邻接关系，但适用范围比 Hall 定理窄，仅能覆盖满足 t 条件的场景，无法涵盖所有存在完备匹配的情况-即存在完备匹配，但未必满足 t 条件。

例如，对于例 7.23 中的图(a)，该图是饱和左部顶点集的完备匹配，但不满足 t 条件。因为图(a)左部最小度数为 2，右部最大度数为 3，无法找到同时满足两个不等式的 t （左部所有顶点度数 $\geq t$ 且右部所有顶点度数 $\leq t$ ）。

例 7.24： 某中学有 3 个课外活动小组：数学组、计算机组和生物组，共 5 名学生：赵、钱、孙、李、周。

问分别在下述 3 种情况下，能否选出 3 人各任一个组的组长？

(a) 赵、钱为数学组成员，赵、孙、李为计算机组成员，孙、李、周为生物组成员。

(b) 赵为数学组成员，钱、孙、李为计算机组成员，钱、孙、李、周为生物组成员。

(c) 赵为数学组和计算机组成员, 钱, 孙, 李, 周为生物组成员。

解:

(1) 问题模型: 将问题转化为二部图匹配问题:

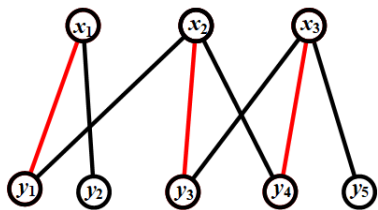
左部顶点集 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, 对应数学组、计算机组、生物组;

右部顶点集 $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, 对应赵、钱、孙、李、周;

边表示学生属于该小组;

问题等价于: 是否存在饱和 X 的匹配 (每组选 1 名不同学生任组长)。

(2) 求解情况(2): 用 Hall 定理判定是否存在饱和 X 的匹配



相邻关系: x_1 相邻 y_1, y_2 ; x_2 相邻 y_1, y_3, y_4 ; x_3 相邻 y_3, y_4, y_5 ;

$k=1$ (任意 1 个顶点) 时: x_1, x_2, x_3 的相邻顶点个数都 ≥ 1 。

$k=2$ (任意 2 个顶点) 时: x_1, x_2 所相邻的顶点全体为 y_1, y_2, y_3, y_4 , 共 4 个 ≥ 2 ; x_1, x_3 的共同相邻顶点为 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 , 共 5 个 ≥ 2 ; x_2, x_3 所相邻的顶点全体为 y_1, y_3, y_4, y_5 , 共 4 个 ≥ 2 。

$k=3$ (任意 3 个顶点) 时: x_1, x_2, x_3 所相邻的顶点全体为 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 , 共 5 个 ≥ 3 。

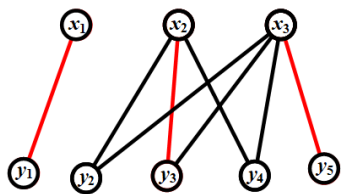
结论: 因为对 $k=1, 2, 3$ 都满足 V_1 中任意 k 个顶点, 至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻。

根据 Hall 定理, 存在饱和 V_1 的匹配, 即可以选出 3 人各担任一个小组的组长。

(3) 求解情况(2):

① t 条件判定完备匹配 (Hall 定理的充分非必要条件)

在情况(a)的条件下, 各顶点度数统计如下:



X 侧: $\deg(x_1)=1, \deg(x_2)=3, \deg(x_3)=4 \rightarrow$ 最小度数为 1;

Y 侧: $\deg(y_1)=2, \deg(y_2)=2, \deg(y_3)=2, \deg(y_4)=2, \deg(y_5)=1 \rightarrow$ 最大度数为 2

存在饱和 X 的匹配的充分非必要条件 (t 条件): 存在正整数 t , 满足:

X 中所有顶点度数 $\geq t$ 且 Y 中所有顶点度数 $\leq t$;

若取 $t=1$: 条件 1 满足 (X 最小度数为 1), 但条件 2 不满足 (y_1, y_2, y_3, y_4 度数 = 2 > 1)

若取 $t=2$: 条件 1 不满足 (x_1 度数 = 1 < 2)

不存在满足 t 条件的正整数 t , 因此无法用 t 条件判定存在匹配, 也无法确定能否选出 3 人各任一个组的组长。

② 用 Hall 定理判定是否存在饱和 X 的匹配

$k=1$: x_1, x_2, x_3 相邻顶点数分别为 1, 3, 4, 均 ≥ 1 , 满足;

$k=2$:

x_1, x_2 相邻顶点为 $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, 共 4 个 ≥ 2

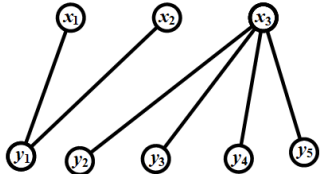
x_1, x_3 相邻顶点为 $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, 共 5 个 ≥ 2

x_2, x_3 相邻顶点为 $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, 共 5 个 ≥ 2 全部满足

$k=3$: x_1, x_2, x_3 相邻顶点为全体 Y , 共 5 个 ≥ 3 , 满足

完全满足 Hall 定理, 因此存在饱和 X 的匹配, 可按图中红色边选出组长: 数学组 $x_1 \rightarrow$ 赵 y_1 , 计算机组 $x_2 \rightarrow$ 孙 y_3 , 生物组 $x_3 \rightarrow$ 周 y_5 。

(4) 求解情况(3): 用 Hall 定理判定是否存在饱和 X 的匹配



相邻关系: x_1 连 y_1 ; x_2 连 y_1, y_2, y_3, y_4 ; x_3 连 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5

$k=1$: V_1 各顶点相邻数均 ≥ 1 ;

$k=2$: $\{x_1, x_2\}$ 其相邻顶点仅 y_1 , 共 $1 < 2$, 不满足 Hall 定理;

$k=3$: 无需验证, 已存在子集不满足条件

结论: 不满足 Hall 定理, 因此不存在饱和 X 的匹配, 无法选出 3 人各任一个组的组长。

7.4.2 欧拉图

欧拉图从顶点集的度数与边的遍历结构视角研究图, 其核心特征是存在一条经过图中每条边恰好一次的回路(欧拉回路), 这类图以其简洁的遍历性质, 被广泛应用于路径规划、物流配送、网络巡检、电路布线及生物序列分析等模型中。

1) 欧拉通路(回路)与欧拉图

定义 7.33: 通路(回路)与欧拉图

设 G 是无向图(允许有孤立顶点、多重边, 无环)。

欧拉通路: 经过 G 中每条边恰好一次的简单通路;

欧拉回路: 经过 G 中每条边恰好一次的简单回路;

欧拉图: 含有欧拉回路的连通无向图称为欧拉图(Euler graph);

仅含有欧拉通路但不含欧拉回路的连通无向图称为半欧拉图/有欧拉通路的图。

欧拉通路与欧拉回路仅要求经过图中每条边恰好一次, 不要求经过所有顶点, 顶点可重复经过, 孤立顶点允许不被经过, 且不影响欧拉通路或欧拉回路存在性的判定。欧拉图是含有欧拉回路的连通无向图, 其连通分支内不存在孤立顶点。

2) 欧拉通(回)路与欧拉图定义补充与约定

适用图类: 上述定义同时适用于无向图与有向图, 两类图的欧拉通路、欧拉回路与欧拉图概念结构一致, 仅在度的描述上分别对应顶点度数与入度、出度。

平凡图约定: 为保证理论体系完备, 规定平凡图(仅含一个顶点且无边的图)为欧拉图。

通路类型界定: 欧拉通路属于简单通路, 欧拉回路属于简单回路, 二者均满足边不重复经过, 顶点可重复经过。

环的欧拉性判定：环对顶点度数的贡献为偶数，不改变度数的奇偶性，因此环不影响图的欧拉性，在判定欧拉通路与欧拉回路存在性时可不予考虑。

孤立顶点说明：欧拉通路与欧拉回路仅要求遍历所有边，不要求遍历所有顶点，孤立顶点可在不路上经过，其存在不影响图的连通性判定与欧拉性判定。

3) 无向图欧拉定理

该定理明确了无向图中欧拉回路存在的充要条件（连通 + 所有顶点偶度），可快速判断欧拉回路是否存在，提升判定效率。

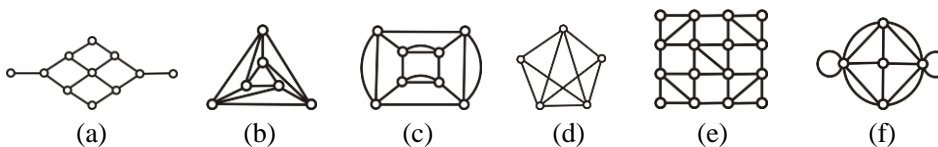
定理 7.9：无向图中欧拉回路与欧拉通路的判定定理

一个无向图存在欧拉回路，当且仅当该图是连通的，并且所有顶点的度数均为偶数。

一个无向图存在欧拉通路但不存在欧拉回路，当且仅当该图是连通的，并且恰好有两个顶点的度数为奇数，其余所有顶点的度数均为偶数。这两个奇度顶点就是该图任意一条欧拉通路的两个端点。

若图不连通，该定理只能在每个独立的连通分支内判定是否形成局部欧拉回路或欧拉通路。

例 7.25：判定下列无向图的欧拉性



解：

图(a)为连通无向图，有多个 (>2) 奇度顶点，不存在欧拉通路，更不存在欧拉回路，既不是欧拉图，也不是半欧拉图。

图(b)是连通无向图，且所有 6 个顶点的度数均为偶数 4，存在欧拉回路，是欧拉图。

图(c)是连通无向图，且所有 8 个顶点的度数均为偶数 4，存在欧拉回路，是欧拉图。

图(d)是连通无向图，存在 2 个度数为 3 的奇度顶点，存在欧拉通路，但不存在欧拉回路，不是欧拉图

图(e)是连通无向图，存在 2 个奇度（度数=5）顶点，不存在欧拉回路，存在欧拉通路，是半欧拉图。

图(f)是连通无向图，存在 4 个奇度顶点，不存在欧拉回路，也不存在欧拉通路，既不是欧拉图，也不是半欧拉图。

4) 欧拉有向图定理

定理 7.10：有向图的欧拉回路与欧拉通路判定定理

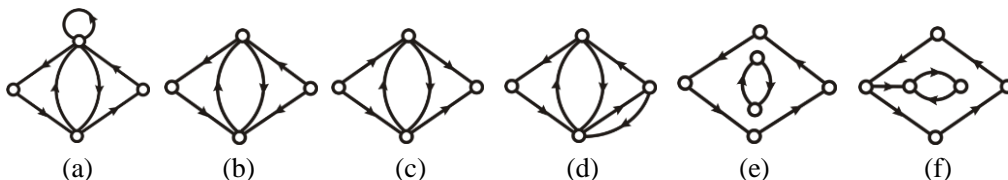
设 D 是有向图。

D 含有欧拉回路当且仅当忽略边的方向后， D 的底图是连通的，且 D 中每个顶点的入度等于出度。

D 含有欧拉通路但不含欧拉回路当且仅当忽略边的方向后， D 的底图是连通的，且恰有一个顶点的入度比出度大 1，恰有一个顶点的出度比入度大 1，其余所有顶点的入度等于出度。

无向图欧拉定理以顶点度数的奇偶性为核心：图连通且全为偶度顶点时有欧拉回路，恰有两个奇度顶点则有欧拉通路。有向图欧拉定理以入度与出度平衡为核心：图连通且各顶点入度等于出度时有欧拉回路，恰一个顶点出度比入度大 1、一个顶点入度比出度大 1，其余顶点入度等于出度则有欧拉通路。两者主要区别在于：无向图看度数奇偶性，有向图看出入度是否平衡。

例 7.26: 判定下列有向图的欧拉性



解:

有向图(a)底图连通，且所有顶点入度等于出度，存在欧拉回路，是有向欧拉图。

有向图(b)图底图连通，但下顶点入度比出度大 2、右顶点出度比入度大 2，不满足欧拉通路的存在条件。

有向图(c)图底图连通，但左顶点出度比入度大 2、右顶点入度比出度大 2，不满足欧拉通路的存在条件。

有向图(d)底图连通，且仅 1 个顶点出度比入度大 1（起点）、1 个顶点入度比出度大 1（终点），其余顶点入度等于出度，完全满足半欧拉图条件，因此存在欧拉通路，但无欧拉回路。

有向图(e)底图连通性不满足：全图由两个互不连通的弱连通子图构成（中间 2 顶点子图与外围 4 顶点子图无连接），不满足有向欧拉图要求的底图弱连通前提，因此不存在覆盖全图的欧拉回路。

外围子图 4 个顶点均入度 = 出度，且底图弱连通，是有向欧拉图，存在自身的欧拉回路；中间子图 2 个顶点均入度 = 出度，且底图弱连通，是有向欧拉图，存在自身的欧拉回路。

综上，全图不满足欧拉回路的连通性要求，故不是有向欧拉图；同时也不满足半欧拉图条件，无欧拉通路。

有向图(f)底图弱连通，且恰有 1 个顶点出度 = 入度 + 1（起点）、恰有 1 个顶点入度 = 出度 + 1（终点），其余顶点入度 = 出度，因此存在欧拉通路，满足半欧拉图条件。

7.4.3 哈密顿图

与欧拉图关注边的遍历（每条边恰好一次）不同，哈密顿图关注顶点的遍历（每个顶点恰好一次），其核心特征是存在一条经过图中每个顶点恰好一次的回路（哈密顿回路），这类图以其对顶点的完整遍历性，被广泛应用于旅行商问题、物流路径优化、网络节点巡检、芯片布线规划及社交网络分析等模型中。

定义 7.34: 哈密顿通路、哈密顿回路与哈密顿图

设无向图或有向图 $G=(V,E)$ ， V 为顶点集， E 为边集：

若图中存在一条经过每个顶点恰好一次的通路，则称该通路为哈密顿通路；

若图中存在一条经过每个顶点恰好一次，且起点与终点重合的回路，则称该回路为哈密顿回路；

若图中存在哈密顿回路，则称该图为哈密顿图。

1) 哈密顿图的基本性质与结构特点

①哈密顿通路是初级通路，哈密顿回路是初级回路，二者均满足顶点不重复遍历，仅起点与终点是否重合存在差异。

②哈密顿图必存在哈密顿通路；但存在哈密顿通路不代表存在哈密顿回路。

③图中的环与平行边不影响哈密顿性，既不会促成也不会破坏哈密顿回路的存在，判定时可忽略此类边。

④与欧拉图存在简明充要条件不同，哈密顿图无通用的充要判定定理，仅有若干充分条件与必要条件，是典型的复杂图论判定问题。

定理 7.11： 哈密顿图的必要条件定理（哈密顿图的顶点删除必要条件）

若无向图 $G=(V,E)$ 是哈密顿图，则对 V 的任意非空真子集 V_1 ，从 G 中删除 V_1 及其关联边后所得子图 $G-V_1$ 的连通分支数 $p(G-V_1)$ 满足 $p(G-V_1) \leq |V_1|$ 。

证明：

设 C 是 G 中的一条哈密顿回路。

考虑回路 C 与顶点集 V_1 的关系：从 C 中删除 V_1 中的所有顶点，得到子图 $C-V_1$ 。一条回路删除 $k=|V_1|$ 个顶点后，最多被拆分成 k 段通路，因此 $p(G-V_1) \leq |V_1|$ 。

注意包含关系： $C-V_1$ 是 $G-V_1$ 的一个生成子图（顶点集相同，边集更少），因此 $p(G-V_1) \leq p(C-V_1)$ （原图连通分支数不会多于其生成子图的连通分支数）。

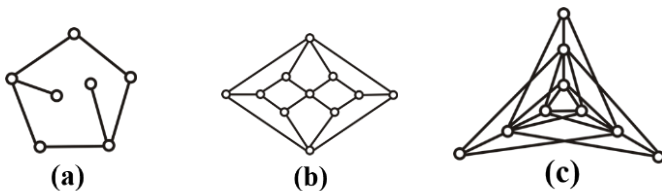
联立两式即得： $p(G-V_1) \leq |V_1|$ 。

2) 哈密顿图的割点推论

哈密顿图必要条件的割点推论：有割点的图不是哈密顿图。

该推论的依据是，删除图中的割点后，连通分支数会大于删除的顶点数，使图不满足哈密顿图的结构要求。该推论可以将抽象判定条件转化为直观的结构特征，实现对非哈密顿图的快速判别。

例 7.27： 利用哈密顿图的割点推论或哈密顿图的必要条件定理判定下列图。



解：

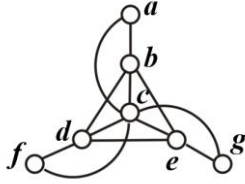
(a)图中存在割点（以左上方顶点为例），删除该顶点后，图会被拆分为2个连通分支，满足割点定义。根据哈密顿图的割点推论，直接判定该图不是哈密顿图。

(b)图中无割点，必须使用哈密顿图必要条件定理进行判定。

删除图中外四边型的上下2个顶点、内四边形的左右2个顶点和中心节点，图被分割成6个独立节点，违反必要条件 $p(G-V_1)=6 \leq |V_1|=5$ ，不满足哈密顿图的结构要求，故非哈密顿图。

(c)图是哈密顿图。

例 7.28： 证明下图并非哈密顿图。



证明：

假设存在一条哈密顿回路。节点 a 、 f 、 g 的度数均为 2，因此边 (a,c) 、 (f,c) 和 (g,c) 都必须包含在该哈密顿回路中。如此一来，顶点 c 将出现三次，这就产生了矛盾。

此外，该图满足定理 7.11 的条件，这表明该条件是必要的，但并非充分条件。此图存在哈密顿通路。

3) 哈密顿性的度数和充分条件

奥雷定理和奥雷型条件是用于判定图中是否存在哈密顿回路 / 通路的充分条件，可以快速、简便地判断一个图是否为哈密顿图或存在哈密顿通路。

定理 7.12： 基于顶点度数和的哈密顿性充分判定定理（奥雷型条件、奥雷定理）

设 G 为 n 阶无向简单图：

若对任意两个不相邻顶点 u, v 均有 $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$ ，则 G 存在哈密顿通路；

当 $n \geq 3$ 且对任意两个不相邻顶点 u, v 均有 $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ ，则 G 中存在哈密顿回路，即 G 为哈密顿图。

4) 哈密顿图的最小度充分条件推论

设 G 是 $n \geq 3$ 阶无向简单图，若最小度 $\delta(G) \geq n/2$ ，则 G 是哈密顿图。

由此可得：

当 $n \geq 3$ 时，完全图 K_n 是哈密顿图；当 $r, s \geq 2$ 时，完全二部图 $K_{r,s}$ 是哈密顿图。

5) 有向图哈密顿通路的充分条件定理

定理 7.13： 有向图中基于基图完全子图的哈密顿通路充分条件

设 D 为 $n(n \geq 2)$ 阶有向图，若忽略所有边的方向后，对应的基图（无向图）含有完全子图 K_n ，则 D 中存在哈密顿通路。

无向简单图可以用顶点度数和判定哈密顿性。有向图可用基图的完全子图结构判定哈密顿通路。这些定理共同构成哈密顿通路 / 回路的充分性判定体系。

要进一步判定有向图是否为哈密顿图，可先用最小度推论判断其无向基图为哈密顿图，再由有向图哈密顿通路充分条件定理得该图存在哈密顿通路；若该图强连通，即可判定为哈密顿图。

6) 相邻相容问题与哈密顿通（回）路

相邻相容问题是将若干元素排成直线或环形序列，使相邻元素满足可共存、可搭配、无冲突的相容关系的排列问题。其本质为图论中的哈密顿通路或回路问题，也是组合数学中约束排列的典型代表。相邻相容问题的研究体现了离散数学将现实关系抽象为图结构进行建模的典型思路，可广泛应用于调度、规划、网络、生产等领域。

例 7.29: 某自动化车间内, 一台机器人需要依次完成 6 个工位的作业, 编号为 A、B、C、D、E、F。由于机械臂运动限制、安全距离或工序衔接要求, 只有部分工位之间可以直接移动, 不能直接移动的工位视为“不相容”, 不能相邻作业。

工位相容关系 (可直接移动)

A: 可与 B、C 直接移动

B: 可与 A、D、E 直接移动

C: 可与 A、E、F 直接移动

D: 可与 B、F 直接移动

E: 可与 B、C 直接移动

F: 可与 C、D 直接移动

问题: 能否为机器人规划一条环形作业路径, 使其从某工位出发, 每个工位恰好经过一次, 最后回到起点, 且相邻工位均可直接移动?

解:

(1) 构建无向图: 顶点: A,B,C,D,E,F; 边集合: (A,B),(A,C),(B,D),(B,E),(C,E),(C,F),(D,F)

(2) 依次构造经过所有点的哈密顿通路, 记录首尾:

A→B→D→F→C→E, 首尾: A - E

A→B→E→C→F→D, 首尾: A - D

A→C→E→B→D→F, 首尾: A - F

A→C→F→D→B→E, 首尾: A - E

(3) 测试闭合性: 所有通路首尾均无对应边, 因此均无法形成回路。

(4) 分析关键点, 增加相容性 (补边)

所有通路起点均为 A, 终点集中在 D、E、F, 其中 A - E 首尾配对出现次数最多。添加 A 与 E 相容条件, 使通路 A→B→D→F→C→E→A 闭合, 得到满足要求的机器人环形作业路径。

7.4.4 平面图

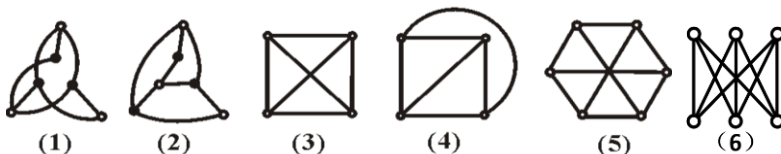
平面图是可画在平面上且边仅在顶点处相交、无交叉的图, 可广泛用于地图、电路布线、社交网络、区域划分等具有天然无交叉结构问题的建模。二部图关注顶点划分、欧拉图侧重边环游、哈密顿图注重顶点环游, 平面图重点关注几何嵌入与无交叉绘制, 侧重图的结构与几何性质。

1) 平面图与其嵌入

定义 7.35: 平面图与其嵌入

若可以将图 G 画在平面上, 使得除公共顶点外, 任意两条边都不相交, 则称 G 为平面图。这样一种无边相交的平面画法称为 G 的一个平面嵌入。不存在平面嵌入的图称为非平面图。

例 7.30: 判断下图是否为平面图



解:

- (a) 图 (1)~(4) 是平面图, (2) 是 (1) 的平面嵌入, (4) 是 (3) 的平面嵌入。
 (b) (5) 是完全图 K_5 , 是典型的非平面图。
 (c) 是完全二部图 $K_{3,3}$, 是典型的非平面图。

2) 平面图的基本性质与常见非平面图示例

- (1) 平面图的子图仍是平面图; 非平面图的母图必为非平面图。
 (2) 完全图 K_n ($n \geq 5$) 与完全二部图 $K_{n,m}$ ($n, m \geq 3$) 均为非平面图。
 (3) 平行边不影响图的平面性。
 (4) 环不影响图的平面性。

3) 平面图面结构核心术语

定义 7.36: 平面图中的面、边界与次数

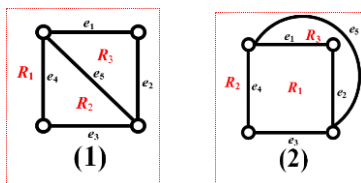
设 G 是一个平面图的平面嵌入。

- (1) 面: 由图 G 的边将平面划分而成的每个区域, 称为 G 的一个面。
 (2) 无限面 (外部面): 面积无限的面, 称为无限面或外部面, 记作 R_0 。
 (3) 有限面 (内部面): 面积有限的面, 称为有限面或内部面, 记作 R_1, R_2, \dots, R_k 。
 (4) 面的边界: 包围某个面 R_i 的所有边构成的回路 (或回路组), 称为该面的边界。
 (5) 面的次数: 围绕面 R_i 的边界走一圈所经过的边的总次数, 记作 $\deg(R_i)$ 。普通边在路径中出现一次计为 1, 环、桥在路径中出现两次计为 2。

区域是几何块, 是指平面被边自然分割出来的一块连通区域。面是图论的结构对象, 是指带边界、可计算次数的区域。

面的次数与图中普通路径长度的核心区别在于: 路径长度仅统计经过的边数, 而面的次数是围绕区域形成闭合边界时的边计数, 需满足区域环绕的闭合性要求。对于由多条普通边围成的面, 其边界可沿各边依次绕行形成闭合回路, 每条边仅被经过一次, 因此面次数等于边界上的边数; 对于环这类自环边, 它仅属于一个面, 虽只需沿该边一次即可从顶点回到顶点, 但在构成区域闭合边界时需按环绕区域的完整轮廓计为两次, 故一条环在对应面的次数中固定计为 2, 以此保证平面图中所有面的次数之和等于边数的两倍。

例 7.30: 分析下面同一平面图的两个平面嵌入



解:

- R_1 在图(1)中是外部面, 在图(2)中是内部面;
 R_2 在图(1)中是内部面, 在图(2)中是外部面。

说明:

- (1) 一个平面图可以有多个不同形式的平面嵌入, 它们都同构。
- (2) 可以通过变换(测地投影法)把平面图的任何一面作为外部面。

4) 平面图面次数和公式

定理 7.14: 平面图面次数定理

在任何平面图的平面嵌入中, 所有面的次数之和等于图中边数的 2 倍。

证明: 一条边或者是 2 个面的公共边界, 或者在一个面的边界中出现 2 次, 在计算各面的次数之和时, 每条边恰好被计算 2 次。

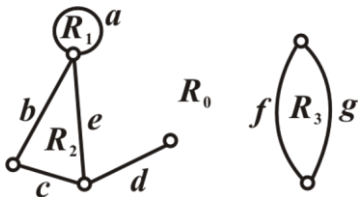
平面图面次数定理对图中各类边计数的约定为:

普通非桥边: 是两个面的公共边界, 在两个面中各计 1 次;

桥(割边): 仅属于 1 个面, 在该面中计 2 次;

外部面边界不是“所有边”, 在内部面计 1 的边, 外部面再计 1; 内部面已经计为 2 的边, 外部面将不再计入, 每条边的总贡献永远只能是 2。

例 7.31: 分析图的面、边界和面的次数。



解:

(1) 图结构解析:

边: a (环)、 b, c, e, d (割边)、 f, g ;

面: R_1 (环内小面)、 R_2 (三角内部面)、 R_3 (平行边内部面)、 R_0 (外部无限面)。

(2) 计算面的次数

边 a (环) 只属于 R_1 , 在 R_1 计数 2;

普通边 b, c, e 在面 R_2 和 R_0 各计数 1;

边 d (割边/桥) 只属于 R_0 , 在 R_0 计数 2;

普通边 f, g 在面 R_3 和 R_0 各计数 1;

外部面 R_0 涉及边 $abcdde, fg$, 计数为 8;

各个面的次数为: $\deg(R_1)=1$, $\deg(R_2)=3$, $\deg(R_3)=2$, $\deg(R_0)=8$ 。

(3) 验证: 图中 7 条边, 完全符合面次数定理, 即 $2 \times 7 = 14$ 。

5) 极大平面图

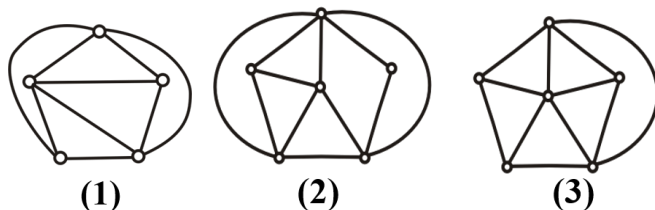
极大平面图描述了平面图的‘饱和性’, 也就是说, 在平面图任意再加一条边就不再有平面性, 这是平面图结构最密的极端情况。

定义 7.37: 极大平面图

设 G 是简单平面图, 如果在 G 中任意两个不相邻的顶点之间添加一条边, 都会使所得图成为非平面图, 则称 G 为极大平面图。

例如: K_1, K_2, K_3, K_4 都是极大平面图。

下图中:



图(1)是 K_5 删去一条边, 是极大平面图。图 (2)、(3) 不满足“加边即非平面”的定义, 不是极大平面图

6) 极大平面图的判定

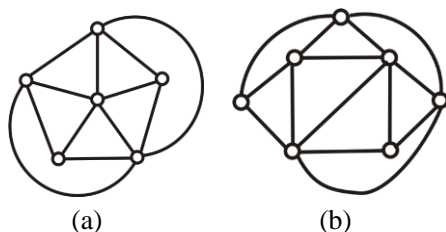
定理 7.15: 极大平面图的基本性质与等价刻画

设 G 是 n 阶简单连通平面图, $n \geq 3$ 。

(1) 任何极大平面图都是连通的;

(2) G 为极大平面图当且仅当 G 的每个面的次数均为 3 (极大平面图的三角剖分等价判定定理)。

例如: 图 (a) 满足每个面的次数均为 3, 是极大平面图; 图 (b) 的外部面的面次为 4, 不是极大平面图。



7.4.5 图的拓扑变换与平面性判定

1) 平面图欧拉公式及其重要推论

定理 7.16: 连通平面图欧拉公式

设 G 是 n 个顶点、 m 条边、 r 个面的连通平面图, 则顶点数、边数和面数之间满足关系式 $n-m+r=2$ 。

证明: 对边数 m 做归纳证明。

$m=0$, G 为平凡图, $n=1, m=0, r=1$, 有 $1-0+1=2$, 结论成立。

设 $m=k(k \geq 0)$ 时, 对任意连通平面图均有 $n-m+r=2$ 成立, 对 $m=k+1$ 时分情况讨论如下:

(1) 若 G 中无圈 (树), 则 G 必有一个度数为 1 的顶点 v , 删除 v 及关联的边, 记作 G' , 满足 $n'=n-1, m'=k, r'=r$ 。由归纳假设, $(n-1)-k+r=2$, 即 $n-(k+1)+r=2$, 得证 $m=k+1$ 时结论成立。

(2) 若 G 含圈, 删去圈上一条边, 得 G' , 满足 $n'=n, m'=k, r'=r-1$ 。由归纳假设 $n-k+(r-1)=2$, 即 $n-(k+1)+r=2$, 得证 $m=k+1$ 时结论成立。

综上, $m=k+1$ 时公式成立。由归纳法, 欧拉公式对所有连通平面图成立。

证毕。

欧拉公式在多分支图上的推广:

设 G 为一个平面图, 其阶数 (顶点数) 为 n , 边数为 m , 面数为 r 。若 G 有 p 个连通分支 ($p \geq 2$), 则满足以下数量关系: $n-m+r=p+1$ 。

证明:

(1) 设 p 个连通分支分别为 G_1, G_2, \dots, G_p , 每个分支均为连通平面图, 适用基础欧拉公式 ($n_i - m_i + r_i = 2$, 其中 n_i, m_i, r_i 分别为第 i 个分支的顶点数、边数、面数)。

(2) 对每个分支应用基础欧拉公式, 累加得: $\sum_{i=1}^p (n_i - m_i + r_i) = 2p$ 。

(3) 总顶点数 $n = \sum_{i=1}^p (n_i)$, 总边数 $m = \sum_{i=1}^p (m_i)$, 总面数 $r = \sum_{i=1}^p (r_i) - (p - 1)$ (因不同分支的外部面合并为 1 个全局外部面, 需减去 $p-1$ 个重复外部面)。

(4) 代入累加式: $(n-m) + [\sum_{i=1}^p (r_i) - (p-1)] = 2p$ 。

(5) 将 $r + p - 1 = \sum_{i=1}^p (r_i)$ 带入上式, 整理得: $n - m + r = p + 1$ 。

证毕。

平面图的欧拉公式仅描述了连通平面图内顶点、边、面的数量关系。推广推论适用于多个连通分支的平面图, 描述了多分支非连通平面图中顶点、边、面和连通分支之间的数量关系。

定理 7.17: 带围长约束的平面图边数上限定理

设 G 为 n 阶连通平面图, 有 m 条边, 且每个面的次数不小于 l ($l \geq 3$), 则 $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$ 。

证明: 对平面图 G 有: \sum 面的次数 $= 2m$, 设面的个数为 r , 由于每个面的次数不小于 l , 有 $r \cdot l \leq 2m$, 由欧拉公式 $n - m + r = 2$, 有 $r = 2 + m - n$, 带入上式有:

$$2m \geq l(2 + m - n), \quad 2m - lm \geq 2l - ln, \quad m(2 - l) \geq 2l - ln$$

将不等式两边同时除以 $2-l$ (因 $l \geq 3$, 所以 $2-l < 0$, 反转不等号), 得到:

$$m \leq \frac{l}{2-l}(2 - n), \quad \text{整理后得到: } m \leq \frac{l}{l-2}(n-2).$$

例 7.32: 证明完全图 K_5 和完全二部图 $K_{3,3}$ 不是平面图。

证明: 采用反证法证明。假设 K_5 和 $K_{3,3}$ 均为平面图。

对于完全图 K_5 , 顶点数 $n=5$, 边数 $m=10$, 围长 $l=3$ 。根据带围长约束的平面图边数上限定理, 有 $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$, 代入得 n, m 和 l 值后, 有矛盾式 $10 \leq 9$ 。

对于完全二部图 $K_{3,3}$, 顶点数 $n=6$, 边数 $m=9$, 围长 $l=4$ 。同理, 由理有矛盾式 $9 \leq 8$ 。

因此假设不成立, 故 K_5 和 $K_{3,3}$ 均不是平面图。

平面图的核心性质-平面图必存在度数 ≤ 5 的顶点:

推导:

根据连通平面图的欧拉公式, 顶点数 n 、边数 m 、面数 r 存在等式 $n - m + r = 2$;

根据带围长约束的平面图边数上限定理, $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$ 且每个面的次数不小于 l ($l \geq 3$), 所有面次数之和 $\geq 3 \cdot r$;

根据平面图面次数定理, 有所有面的次数之和为 $2m$, 则有 $2m \geq 3 \cdot r$;

将 $r \leq \frac{2m}{3}$ 代入欧拉公式, 整理得 $m \leq 3n - 6$ (边数上限);

假设所有顶点度数 ≥ 6 , 由握手定理得 $2m \geq 6n$, 即 $m \geq 3n$, 与边数上限 $m \leq 3n - 6$ 矛盾, 故假设不成立;

结论: 平面图中必存在至少一个度数 ≤ 5 的顶点。

2) 图的同胚与同胚变换

引入图的同胚与同胚变换, 是为了刻画图在拓扑意义下的等价性, 进而建立平面图的结构判定准则 - 即一个图可平面当且仅当其不含与 K_5 、 $K_{3,3}$ 同胚的子图, 因为 K_5 、 $K_{3,3}$ 是最基本的非平面图, 是平面性判定的核心参照。

定义 7.38: 图的同胚与同胚变换

设 G_1 和 G_2 是两个图。若 G_1 与 G_2 可以通过在其边上有限次插入或消去 2 度顶点后, 变得彼此同构, 则称图 G_1 与 G_2 是同胚的。插入或消去二度顶点的操作称为同胚变换。

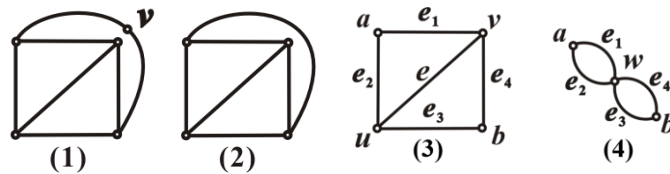
3) 图的边收缩 / 收缩变换

定义 7.39: 图的边收缩 / 收缩变换

收缩一条边 $e=uv$, 是指删除这条边, 并将顶点 u 与 v 合并为一个新顶点, 使所有与 u, v 关联的边都关联到这个新顶点。

图经过收缩变换后, 得到的简化图不会改变原图的连通性、平面性等核心拓扑属性。简化后的结构可降低图的分析难度, 且若原图形不可平面, 收缩后依然不可平面。

例如, 下图中, 图 (1) 消去 2 度顶点 v 得到图(2), 在图(2)插入 2 度顶点 v 得到图 (1); 图 (3) 收缩边 e , 得到图(4)。



4) 图的拓扑变换与平面性判定

定理 7.18: 库拉托夫定理 (Kuratowski's Theorem)

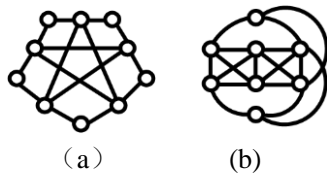
一个图是平面图当且仅当它既不含与 K_5 同胚的子图, 也不含与 $K_{3,3}$ 同胚的子图。

定理 7.19: 瓦格纳定理 (Wagner's Theorem)

一个图是平面图当且仅当它既无可收缩为 K_5 的子图, 也无可收缩为 $K_{3,3}$ 的子图。

瓦格纳定理以“收缩变换”为核心判定依据, 而库拉托夫定理以“同胚关系”为核心判定依据, 二者均是平面性判定的核心定理, 两个定理结合使用可提升平面性判定的准确性。

例 7.33: 证明下图为非平面图。



证明:

图 (a) 经同胚变换去掉 5 个 2 度顶点变为图 (c) 中的黑色图 K_5 , 收缩 5 条边变为图 (c) 中的黑色图 K_5 , 都证明图 (a) 是非平面图。

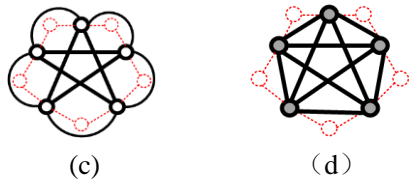
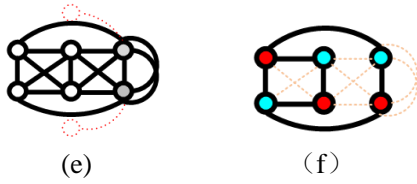


图 (b) 收缩两条边变为图(e)中的黑色部分, 并可进一步提取出 $K_{3,3}$ 子图 (f), 也就是与 $K_{3,3}$ 同胚, 所以图 (b) 是非平面图。



7.4.6 平面图着色

1) 平面图的对偶图

定义 7.40: 平面图的对偶图构造

设平面图 G 有 n 个顶点, m 条边和 r 个面, G 的对偶图 $G^* = \langle V^*, E^* \rangle$ 构造方法如下:

顶点构造: 在平面图 G 的每一个面 R_i 中任取一个点 v_i^* 作为对偶图 G^* 的顶点, 即对偶图的顶点集 $V^* = \{ v_i^* | i=1, 2, \dots, r \}$;

边构造: 对于平面图 G 每一条边 e_k ($k=1, 2, \dots, m$), 分两种情况构造对偶图的边 e_k^* : (1) 若 e_k 位于平面图 G 中两个不同面 R_i 与 R_j 的公共边界上, 则作边 $e_k^* = (v_i^*, v_j^*)$, 且边 e_k^* 与 e_k 相交; (2) 若边 e_k 仅位于平面图 G 中同一个面 R_i 的边界上, 则构造环 $e_k^* = (v_i^*, v_i^*)$ 。对偶图 G^* 的边集 $E^* = \{ e_k^* | k=1, 2, \dots, m \}$ 。

对偶图与原图的信息保留与舍弃:

(1) 对偶图不再体现的平面图细节

原图顶点与边的原始布局、位置坐标及相对距离等几何信息不再直接体现;

原图顶点的度数、边的具体连接形式 (如边的交叉、环绕方式) 等局部结构细节。

(2) 对偶图保留的平面图核心性质

图的连通性保持不变;

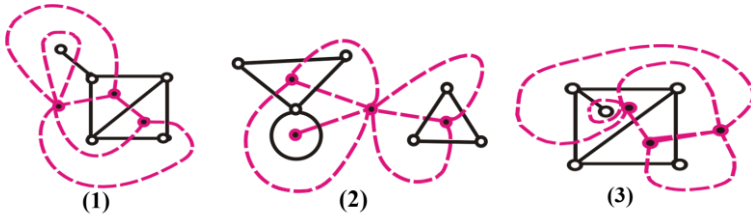
保留平面性, 对偶图仍为平面图;

原图中的环对应于对偶图中的割集, 环与割集的对偶关系得以保持;

对偶图与原图满足相同的欧拉公式;

对偶图与原图的边数相等。

例如: 下图中黑色实线为原平面图, 红色虚线为其对偶图。



连通平面图 G 对偶图 G^* 具有以下基本性质:

平面性与可嵌入性: 对偶图 G^* 仍是一个平面图, 并且存在一个自然的平面嵌入。

连通性: 连通平面图 G 的对偶图 G^* 必定是连通图, G^* 的顶点 (对应原图的面) 之间总存在路径相连。

环与割边 (桥) 的对偶关系:

若原图 G 中的某条边 e 是一个环, 则其在对偶图 G^* 中对应的边 e^* 是一条割边; 若原图 G 中的某条边 e 是一条割边 (桥), 则其在对偶图 G^* 中对应的边 e^* 是一个环。

边数守恒：对偶图 G^* 的边数与原图 G 的边数相等，即 $|E^*| = |E|$ 。原图的每一条边都在对偶图中对应且仅对应一条边。

无法保证同构性的保持：平面图的同构并不能保证其对偶图也同构，对偶图的结构会受平面嵌入方式的影响。同一平面图不同的平面嵌入方式（比如面的划分、边的排列不同），所构造出的对偶图也可能存在差异，无法确保对偶图之间是同构的。

定理 7.20： 连通平面图与其对偶图的数量关系

设 G^* 是连通平面图 G 的对偶图， n^*, m^*, r^* 和 n, m, r 分别为 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数，则

- (1) $n^* = r$ ：对偶图的顶点数，等于原图的面数；
- (2) $m^* = m$ ：对偶图的边数，与原图的边数相等；
- (3) $r^* = n$ ：对偶图的面数，等于原图的顶点数；
- (4) $d(v_i^*) = \deg(R_i)$ ：对偶图中顶点 v_i^* 的度数等于原图中对应面 R_i 的度（次数）（面的次数等于围绕该面边界的边数（桥与环计 2 次））。

2) 图的着色

无向图的着色是指使用 k 种颜色映射到无向图的每个顶点，使任意相邻的两个顶点颜色不同，则该映射称为图的 k -着色。使图可着色的最小 k 值称为图的色数，记为 $\chi(G)$ 。完全图 K_n 色数为 n ，二部图色数不超过 2。平面图的顶点着色与一般图的顶点着色定义一致，其顶点着色也可通过对偶图转化为面着色。平面图的面着色要求有公共边界边（非仅公共顶点）的相邻面颜色不同，地图着色是平面图面着色的典型实际应用场景。

平面图的不同平面嵌入虽然面的划分和相邻关系存在差异，虽然不影响相邻不同色的着色规则，但会影响面着色的具体方式。平面图的面着色可通过对偶图转化为顶点着色，其目标是用最少的颜色，满足相邻元素（顶点 / 面）颜色不同的规则，实现对平面图的合理着色。四色定理和五色定理为连通平面图着色提供了明确的颜色数量上限，帮助着色过程朝着“用最少数颜色实现合规着色”的最优目标推进。

3) 五色定理

定理 7.21： 五色定理

任何连通平面图都是 5 - 可着色的。即对于任意一个连通平面图 $G=(V,E)$ ，其色数 $\chi(G) \leq 5$ ，也就是说，存在一种使用不超过 5 种颜色的正常着色方式，使得图 G 中任意两个相邻的顶点颜色互不相同。

证明： 采用数学归纳法，结合平面图的核心性质（存在度数 ≤ 5 的顶点），证明“所有连通平面图均可使用不超过 5 种颜色完成正常着色”，步骤如下：

当连通平面图的顶点数 $n=1$ 时，仅需 1 种颜色即可完成着色，满足“相邻顶点颜色不同”，定理成立。

假设所有顶点数 $\leq k$ 的连通平面图，都可使用不超过 5 种颜色完成正常着色。

任取一个顶点数为 $k+1$ 的连通平面图 G ，删除 G 中度数 ≤ 5 的顶点 v （平面图的核心性质），移除 v 后得到连通平面图 G' （顶点数为 k ）。根据归纳假设， G' 可使用 ≤ 5 种颜色完成着色；

再将 v 放回 G 中，由于 v 的相邻顶点（最多 4 个，因 v 的度数 ≤ 5 ）所用颜色不超过 4 种，因此总能找到 1 种未被相邻顶点使用的颜色分配给 v ，使 v 与相邻顶点颜色不同。

结论：综上，所有连通平面图均可使用不超过 5 种颜色完成正常着色，五色定理成立。

4) 四色定理

定理 7.22：任何连通平面图都是 4 - 可着色的，即对任意平面图 G ，其色数 $\chi(G) \leq 4$ 。

五色定理是平面图着色的基础定理，四色定理则完善了平面图着色的最优理论边界。二者均为连通平面图着色提供明确的颜色数量上限，奠定平面图着色的理论基础。五色定理可通过数学归纳法手工严谨证明，确定连通平面图最多需 5 种颜色；四色定理需计算机辅助证明，进一步将颜色上限优化为 4 种，是五色定理的强化与优化。

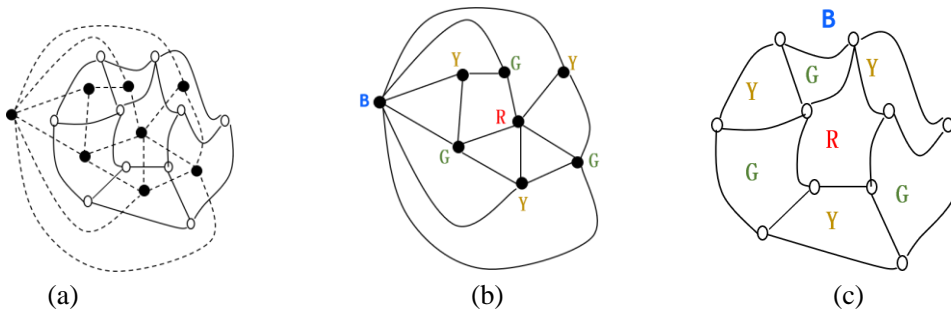
5) 地图着色

地图着色本质是平面图的面着色应用，可通过对偶图将地图的区域着色转换为顶点着色，颜色数量遵循四色定理，目标是用最少颜色完成地图的合规着色。地图的非连通区域可分别按平面图着色规则处理，确保相邻区域无同色。

地图着色的主要步骤：

- (1) 构建对偶图：按照平面图对偶图构造规则，将地图的每个区域对应为对偶图的顶点，区域的公共边界对应为对偶图的边。
- (2) 确定着色颜色上限：颜色上限遵循四色定理，或用五色定理作为备选方案，避免盲目尝试，锚定最优着色的边界。
- (3) 对偶图顶点着色：优先选择度数 ≤ 5 的顶点，分配未被相邻顶点使用的颜色；依次为所有顶点分配颜色，确保无相邻顶点同色。
- (4) 映射回原地图：将对偶图中每个顶点的颜色，直接映射回原地图对应的区域，得到最终着色方案。验证无冲突，完成地图着色。

例 7.34：地图着色示例



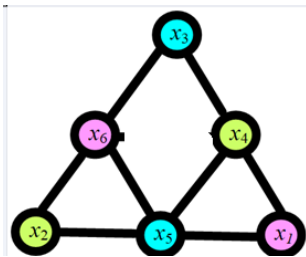
解：

- (1) 先将图 (a) 中的实线地图，转换成虚线和实心顶点构成的对偶图；
- (2) 为地图对偶图 (b) 各顶点着色，B 代表地图外部区域；
- (3) 将对偶图 (b) 的顶点着色映射回地图，得到地图着色 (c)。

例 7.35：例 一个程序有 6 个变量 x_i ($i=1,2,\dots,6$)，其中 x_1 与 x_4 , x_1 与 x_5 , x_2 与 x_5 , x_2 与 x_6 , x_3 与 x_4 , x_3 与 x_6 , x_4 与 x_5 , x_5 与 x_6 要同时使用。给每一个变量分配一个寄存器，要同时使用的两个变量不能分配同一个寄存器。问：至少要使用几个寄存器？如何分配？

解：该例题属于基于无向图顶点着色的资源分配问题，将不能共用寄存器的变量作为冲突对象建立冲突图，用顶点着色求最少颜色数，也就得到了最少寄存器数。

(1) 根据冲突关系建立无向图（模型），6 个变量 x_i ($i=1,2,\dots,6$) 作为顶点，有冲突的变量之间建立边，得到无向图。



(2) 构造着色方案

图中 x_4, x_5, x_6 两两冲突，构成 3-团（完全图 K_3 ），色数下界至少为 3。

先将初始 3 种颜色（绿、蓝、红）赋予 x_4, x_5, x_6 ，然后根据 x_1, x_2, x_3 与 x_4, x_5, x_6 的相邻（冲突）关系分配互不相同的颜色。

x_1 与 x_4, x_5 相邻，排除绿、蓝，直接染红色，无冲突；

x_2 与 x_5, x_6 相邻，排除蓝、红，直接染绿色，无冲突；

x_3 与 x_4, x_6 相邻，排除绿、红，直接染蓝色，无冲突。

整个着色过程如果出现颜色冲突，则需要回溯另选颜色继续着色。

结论：至少需要 3 个寄存器，可行的一种寄存器分配方案为： x_1 与 x_6 用红色寄存器； x_2 与 x_4 用绿色寄存器； x_3 与 x_5 用蓝色寄存器。

知识扩展提示词

1. 证明“极大平面图的三角剖分等价判定定理”。
2. 四色定理为什么需计算机辅助证明？
- 3.

第 7 章主要数学符号列表

序号	符号	含义	示例
1	$\&$	无序集	$A\&B=\{a,b \mid a\in A, b\in B, a\neq b\}$
2	\times	笛卡尔积	$A\times B=\{(a,b) \mid a\in A \wedge b\in B\}$
3	(A,m)	重集合有序对	$M=(A,m)$, 由基础集合 A 和重复度函数 m 构成多重集合 M
4	$d(v)$	图顶点 v 的度	$d(v)$ 表示顶点 v 作为边的端点出现的次数之和
5	$\Delta(G)$	图 G 的最大度	$\Delta(G)=\max\{d(v) \mid v\in V\}$
6	$\delta(G)$	图 G 的最小度	$\delta(G)=\min\{d(v) \mid v\in V\}$
7	$d^+(v)$	有向图顶点 v 的出度	$d^+(v)$: 以顶点 v 为起点的边的条数
8	$d^-(v)$	有向图顶点 v 的入度	$d^-(v)$: 以顶点 v 为终点的边的条数
9	$\Delta^+(D)$	有向图 D 的最大出度	$\Delta^+(D)=\max\{d^+(v) \mid v\in V\}$
10	$\delta^+(D)$	有向图 D 的最小出度	$\delta^+(D)=\min\{d^+(v) \mid v\in V\}$
11	$\Delta^-(D)$	有向图 D 的最大入度	$\Delta^-(D)=\max\{d^-(v) \mid v\in V\}$
12	$\delta^-(D)$	有向图 D 的最小入度	$\delta^-(D)=\min\{d^-(v) \mid v\in V\}$
13	$\Delta(D)$	有向图 D 的最大度	$\Delta(D)=\max\{d(v) \mid v\in V\}$
14	$\delta(D)$	有向图 D 的最小度	$\delta(D)=\min\{d(v) \mid v\in V\}$
15	K_n	无向完全图	无向简单图中每个顶点的度数都恰好等于 $n-1$

16	C_n	无向圈图	n 个顶点组成的无向圈
17	\vec{C}_n	有向圈图	n 个顶点组成的有向圈
18	W_n	轮图	n 阶轮图记作 W_n
19	Q_n	n 方体图	Q_2 (正方体图) 的分配次序为: $00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$
20	\bar{G}	图 G 的补图	$\bar{G} = \langle V, \bar{E} \rangle$, $\bar{E} = V \times V - E$
21	\cong	图同构	G_1 与 G_2 是同构的, 记作 $G_1 \cong G_2$
22	$p(G)$	无向图 G 的连通分支数	$p(G)=1$, G 是连通图
23	$d(u,v)$	顶点 u 与 v 的距离	若 u 与 v 不连通, 则 $d(u,v)=\infty$
24	$\kappa(G)$	图 G 的点连通度	$\kappa(G)=\min\{ V' \mid V' \text{ 是 } G \text{ 的点割集, 或 } G-V' \text{ 为平凡图}\}$
25	$\lambda(G)$	图 G 的边连通度	$\lambda(G)=\min\{ E' \mid E' \text{ 是 } G \text{ 的边割集}\}$
26	$M(G)$	无向图关联矩阵	$M(G)=[m_{ij}]$, $m_{ij} \in \{0,1\}$ (关联为 1)
27	$M(D)$	有向图关联矩阵	$M(D)=[m_{ij}]$, $m_{ij} \in \{-1,0,+1\}$ (出-1, 入+1)
28	$A(G)$	无向图邻接矩阵	$A(G)=[a_{ij}^{(1)}]_{n \times n}$, a_{ij} =顶点 v_i 与 v_j 之间边的条数
29	$A(D)$	有向图邻接矩阵	$A(D)=[a_{ij}^{(1)}]_{n \times n}$, a_{ij} =顶点 v_i 与 v_j 之间边的条数
30	$P(G)$	图 G 的可达矩阵	$P = [p_{ij}]_{n \times n}$, $p_{ij} \in \{0,1\}$ (v_i 与 v_j 之间存在通路为 1)
31	$\langle V_1, V_2, E \rangle$	二部图	$V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,
32	$\deg(R_i)$	平面图的面 R_i 的度数	围绕面 R_i 的边界走一圈所经过的边的总次数
33	G^*	平面图 G 的对偶图 G^*	$G^* = \langle V^*, E^* \rangle$, G 与 G^* 之间存在面-顶点、边-边、顶点-面的一一对应, 且保持相邻关系不变的双向拓扑映射
34	$\chi(G)$	图可着色的最小色数	完全图 K_n 色数为 $\chi(G)=n$