第 6 章 函数

函数是一类特殊的二元关系。对于集合 A,B 之间的二元关系 R，它是 $A\times B$ 的子集，A 中可以有元素不出现在 R 的有序对中，并且允许一对多、多对多的对应关系。函数则要求 A 中每一个元素在陪域 B 中都有唯一的对应元素。

函数是逻辑与集合的产物，是关系的严格化，是离散结构的统一描述工具，是现代数学从基础到应用、从离散到连续、从具体到抽象的核心桥梁与统一概念。

6.1 函数定义与性质

6.1.1 函数的定义

定义 6.1：函数

设 A,B 为集合。若二元关系 $f\subseteq A\times B$ 满足：对每个 $x\in A$，存在唯一的 $y\in B$ 使得 $(x,y)\in f$，则称 f 为从 A 到 B 的函数，记作 $f{:}A\to B$。若$(x,y)\in f$，则记 $y=f(x)$，并称 y 为 f 在 x 处的函数值。

由定义可知：集合 A 称为 f 的定义域，记作 $\mathrm{dom}f=A$；集合 B 称为 f 的陪域；所有函数值构成的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为 f 的值域。

例如，设 $A=\{x_1, x_2, x_3\}$，$B=\{y_1,y_2\}$，定义如下二元关系：

$f_1=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_2>,<x_3,y_2>\}$， $f_2=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_2>\}$，

f_1 满足函数的全域性与单值性，是函数。f_2 违反单值性，不是函数。

1）函数的相等

定义 6.2： 函数相等

设 $f{:}A\to B$，$g{:}C\to D$ 是函数。称 f 与 g 相等，记作 $f=g$，当且仅当：

定义域相同：$A=C$；对任意 $x\in A$，都有 $f(x)=g(x)$。

例如：函数 $f(x)=(x^2-1)/(x+1)$和 $g(x)=x-1$ 不相等, 因为 dom$f$ 不能取-1， dom$f\subset$domg。

定义 6.2 是从函数结构的角度，认为函数相等等价于定义域相同，并且在定义域上每一点的函数值都相等。从集合论的层面看，函数是有序对集合，集合相等就是元素完全相同，即 f=g$\Leftrightarrow f\subseteq g\wedge g\subseteq f$。

2）函数的定义域、值域与方向

为了夯实函数严格的集合论基础，明确函数与二元关系之间的逻辑关系，下面从二元关系角度对函数 $f{:}A\to B$ 进行刻画。

定义 6.3：设 A, B 为集合, 如果

(1) f 为函数

(2) $\mathrm{dom}f = A$

(3) $\mathrm{ran}f \subseteq B$,

则称 f 为从 A 到 B 的函数, 记作 $f : A\to B$。

定义 6.3 从函数作为二元关系的三要素维度来描述函数，通过单值性、全域性、值域限制三个条件，清晰界定函数的定义域、陪域与取值范围，使函数的定义更加严谨、规范，并为后续函数相等、复合等概念提供统一的理论依据。

例 6.1：从二元关系三要素的角度分析函数

（1）$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(x)=2x$

f 是函数（满足单值性），定义域 dom $f=\mathbb{N}$，值域 ran $f=\{0,2,4,6,\ldots\}\subseteq\mathbb{N}$。因此 f 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的函数。

（2） $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ g(x)=2$

g 是函数（满足单值性），定义域 dom $g=\mathbb{N}$，值域 ran $g=\{2\}\subseteq\mathbb{N}$。因此 g 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的函数。

3）满射、单射与双射函数

函数的单射、满射、双射是从全局性视角，描述函数定义域 A 与陪域 B 之间元素的映射关系，刻画其是否满足不重复、全覆盖与一一对应。其目的是揭示定义域与陪域之间的对应规律，对函数进行分类，并为逆函数存在性等后续理论提供依据。

定义 6.4：单射、满射、双射

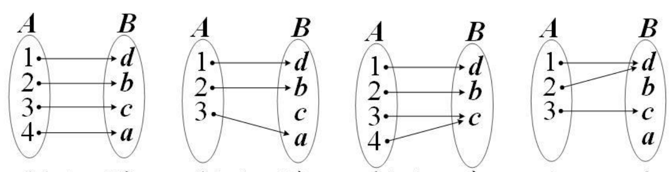
设 $f:A\to B$。

(1) 函数 $f:A\to B$ 是满射的，当且仅当对每个 $b\in B$，存在 $a\in$ A 使得 $f(a)=b$。

(2) 函数 $f:A\to B$ 是单射（一对一）的，当且仅当对所有 $a,b\in A$，有 $f(a)=f(b)\Longrightarrow a=b$。

(3) 若函数 $f:A\to B$ 既是满射又是单射，则称 f 是双射（一一对应）。

例 6.2：判断函数的单射、满射、双射性质



（$f_1:A\to B$） （$f_2:A\to B$） （$f_3:A\to B$） （$f_4:A\to B$）

解：

（1）函数 f_1 对 A 中不同元素的像均不相同，满足单射。B 中每个元素都有原像，即 ran $f_1=B$，是满射。则 f_1 是双射函数。

（2）函数 f_2 对 A 中不同元素的像均不相同，满足单射。但 B 中元素 c 没有原像，即 ran $f_2=\{a,b,d\}\neq B$，不满足满射。因此，f_2 是单射但非满射的函数。

（3）函数 f_3 的值域 ran $f_3=\{b,c,d\}=B$，满足满射。但 A 中存在不同元素 3 和 4 对应到 B 中同一元素 c，不满足单射。因此，f_3 是满射但非单射的函数。

（4）函数 f_4 中，A 中不同元素 1 和 2 对应到 B 中同一元素 d，不满足单射；同时 B 中元素 a、b 没有原像，即 ran $f_2=\{c,d\}\neq B$，不满足满射。因此，f_2 是既非单射也非满射的函数。

4）函数集合

函数集合将函数从单纯的对应关系提升为集合中的元素，可精确定义并计数从集合 A 到集合 B 的所有映射，使其可按照集合论严格处理函数对象，研究函数的整体结构、运算规律与高阶性质。

定义 6.4： 函数集合

设 A,B 为集合，所有从 A 到 B 的函数构成的集合记作 B^A, 读作"B 上 A"。 其符号化表示为：$B^A=\{\,f\mid f:A\to B\,\}$

基数（计数）：

若 $|A|=m$, $|B|=n$, 且 $m, n>0$, $|B^A|=n^m$

若 $A=\varnothing$, 则 $B^A=B^{\varnothing}=\{\varnothing\}$

若 $A\neq\varnothing$且 $B=\varnothing$, 则 $B^A=\varnothing^A=\varnothing$。

例 6.3： 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 求 B^A。

解： 根据函数集合的定义，由｜A｜=3、｜B｜=2，得｜B^A｜=2^3=8，故 $B^A = \{ f_0, f_1, \ldots , f_7 \}$，集合中的所有函数定义如下：

$f_0=\{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$
$f_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$
$f_2=\{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$
$f_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$
$f_4=\{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$
$f_5=\{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$
$f_6=\{<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$
$f_7=\{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$

5）常函数、恒等函数及单调函数

常函数、恒等函数及单调函数都是基于映射特性的特殊函数，它们从不同维度描述函数自身的映射关系与特性。其中，常函数描述函数的输出特性，恒等函数描述函数的对应关系特性，单调函数描述函数的序结构特性。

定义 6.5： 常函数、恒等函数及单调函数

(1) 设函数 $f: A\to B$, 如果存在 $c\in B$，使得对所有的 $x\in A$ 都有 $f(x)=c$, 则称 $f : A\to B$ 是常函数。

(2) 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的恒等函数, 对所有的 $x\in A$ 都有 $I_A(x)=x$。

(3) 设$<A, \preccurlyeq>$, $<B, \preccurlyeq>$为偏序集，函数 $f: A\to B$，若对任意的 $x_1, x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有 $f(x_1)\preccurlyeq f(x_2)$, 则称 f 为单调递增函数； 若对任意的 $x_1, x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有 $f(x_1)\prec f(x_2)$, 则称 f 为严格单调递增函数。

类似的也可以定义单调递减和严格单调递减的函数。

常函数、恒等函数与单调函数作为三类特殊函数，各有其本质特征与结构特点。常函数的核心是输出恒定且与输入无关，其定义域可为任意集合，值域仅含一个固定元素，对应陪域需包含该固定元素。恒等函数的本质是输入与输出完全一致，其定义域与值域为同一集合，有序对表示为 $I_A =\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$。单调函数的本质是保持或严格保持偏序关系，其定义域与值域均为偏序集，核心是输入与输出的序关系保持一致或反向。

5）特征函数

特征函数是基于集合隶属关系的特殊函数，从元素与集合的关联维度描述其核心特性，通过二元取值（0 或 1）精准刻画全集内元素与特定子集的隶属关系，核心目的是将集合的隶属关系转化为函数的映射关系，为集合运算、集合与函数的关联分析提供简洁的量化工具，搭建集合论与函数论之间的连接桥梁。

定义 6.6： 特征函数

设 U 为全集，且 A⊆U。集合 A 的特征函数（记为χ_A ）是一个从全集 U 到二元集合{0,1}的函数，即χ_A：$U\to\{0,1\}$，其映射规则定义为$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$

例 6.4： 设 $A=\{a,b,c\}$, A 的每一个子集 A'都对应于一个特征函数, 不同的子集对应于不同的特征函数，A 的所有子集及其对应特征函数如下：

$\chi_{\varnothing} = \{<a,0>,<b,0>,<c,0>\}$

$\chi_{\{a\}}=\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\}$

$\chi_{\{b\}}=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\}$

$\chi_{\{c\}}=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\}$

$\chi_{\{a,b\}} = \{<a,1>,<b,1>,<c,0>\}$

$\chi_{\{a,c\}} =\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\}$

$\chi_{\{b,c\}}=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$

$\chi_{\{a,b,c\}}=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$

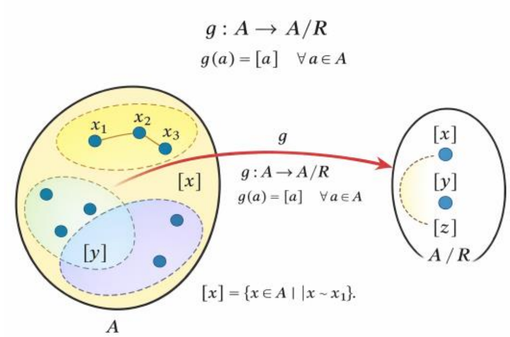
6）自然映射函数

自然映射是一种特殊函数，它从集合的等价关系与商集视角，基于集合 A 上的任意等价关系 R，将 A 中的每个元素映射到其所属的等价类，也就是商集 A/R 中的元素。自然映射聚焦于元素按等价关系的归类，描述原集合元素与其所属等价类的对应关系，且本身完全符合函数的严格定义。自然映射的数量由集合 A 上等价关系 R 的数量决定，一个等价关系 R 唯一对应一个自然映射。

定义 6.7： 自然映射函数

设 R 是 A 上的等价关系, 令 $g : A\to A/R$， $g(a) = [a]$, $\forall a\in A$，称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射（函数）。

上述定义中，$[a]$是在等价关系 R 下，元素 a 所在的等价类，它是 A 的一个子集，定义为$[a]=\{x\in A \mid x\mathrm{R}a\}$。也就是说，自然映射函数 g 是将每个元素 $a\in A$ 映射到它所在的等价类 $[a]$。下图是自然映射函数的示意图：



定理 6.1： 自然映射的满射性与双射性定理

设 A 为非空集合，R 是 A 上的等价关系，$g:A\to A/R$ 为自然映射（$g(a)=[a]_R$）。

（1）自然映射必为满射：对任意等价类 $[a]\in A/R$，存在 $a\in A$ 使得 $g(a)=[a]$，故 g 是满射。

（2）自然映射为双射的充要条件：g 是双射当且仅当 R 是 A 上的恒等关系（即 $aRb\Leftrightarrow a=b$）。此时每个等价类 $[a]=\{a\}$，商集 A/R 与 A 一一对应，g 既是单射又是满射。

自然映射是将集合按等价关系分类、归并的映射，其满射性保证了它能完整覆盖所有等价类，不会遗漏任何一类，体现了 “分类必完整” 的特性。当等价关系为恒等关系时，原集合与商集一一对应，此时自然映射既是满射又是单射，因此为双射。

例 6.5：设 A={1, 2, 3}，

（1）取等价关系：R_1={<1,2>,<2,1>}∪I_A，则自然映射：$g_1(1) = g_1(2) = \{1,2\}$，$g_1(3) = \{3\}$。其函数集合表示为：$g1 = \{\langle 1,\{1,2\}\rangle,\langle 2,\{1,2\}\rangle,\langle 3,\{3\}\rangle\}$

（2）取等价关系：I_A，则自然映射：$g_2(1)=\{1\}$, $g_2(2)=\{2\}$, $g_2(3)=\{3\}$。其函数集合表示为：$g2=\{ \langle 1,\{1\}\rangle,\langle 2,\{2\}\rangle,\langle 3,\{3\}\rangle\}$。

7）函数的增长速度与算法复杂度分析

函数的增长速度是指当自变量 n 趋于无穷大时，函数 $f(n)$ 的渐近增长量级与变化速率。它忽略常数因子与低次项，采用大 O、大 Ω、大 Θ 渐近记号对 $f(n)$的增长量级进行严格描述与比较，并将其应用于算法复杂度分析。

定义 6.8：大 O、大 Ω、大 Θ 渐近记号定义

设 f 和 g 是从整数集（或实数集）到实数集的函数。

（1）大 O 记号（上界）：若存在正整数常数 C 和 k，使得对所有 $n>k$，都有 $|f(n)|\le C|g(n)|$，则记 $f(n)=O(g(n))$，表示 $f(n)$的增长阶不超过 $g(n)$的增长阶。

（2）大 Ω 记号（下界）：若存在正整数常数 C 和 k，使得对所有 $n>k$，都有 $|f(n)|\ge C|g(n))|$，则记 $f(n)= \Omega(g(n))$，表示 $f(n)$ 的增长阶不低于 $g(n)$ 的增长阶。

（3）大 Θ 记号（紧确界 / 同阶）：$f(n)=\Theta(g(n))$当且仅当 $f(n)= O(g(n))$且 $f(n)= \Omega(g(n))$表示 $f(n)$与 $g(n)$同阶，增长速度相当。

这些渐近记号从函数的增长视角定义了当自变量趋于无穷大时，函数变化快慢与增长级别，可用于快速、简洁、准确地比较算法效率，评价算法在大规模输入下的性能优劣。

算法的基本操作次数是输入规模 n 的函数，函数值对应操作次数，决定算法的运行时间。因此，函数的变化快慢与增长级别，能够准确反映算法在问题规模扩大时的效率变化趋势。为了定量刻画、比较与评价算法效率，需要借助大 O、大 Ω、大 Θ 渐近记号来描述时间复杂度函数的增长特性。

定义 6.9： 最坏情况时间复杂度函数及其阶

设 $W: \mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ 为算法的最坏情况时间复杂度函数，

$W(n)$ 表示：对规模为 n 的所有输入，算法在最坏情况下执行的基本运算次数的最大值。

设 $g(n)$ 为基准函数，

若 $W(n)=O(g(n))$，则称 $W(n)$ 的增长阶不超过 $g(n)$ 的阶；

若 $W(n)= \Omega(g(n))$，则称 $W(n)$ 的增长阶不低于 $g(n)$ 的阶；

若 $W(n)= \Theta(g(n))$，则称 $W(n)$ 与 $g(n)$同阶。

最坏情况时间复杂度函数 $W(n)$是由算法本身的执行过程决定的具体函数，其表达式通常较为复杂。基准函数 $g(n)$是一类结构简单、增长特征明确、便于比较的常用函数，引入基准函数 g(n) 进行比较的目的是忽略 $W(n)$中的常数因子与低次项，只抓住其增长速度与量级这一核心特征，使用渐近记号 O、 Ω、 Θ 对 $W(n)$ 进行简化、归类与比较，实现对算法最坏情况时间效率的定量刻画与评价。

在算法分析中，基准函数 g(n) 一般选择 1、$\log n$、n、$n\log n$、n^2、n^3、2^n 等形式。其主要优势是形式简洁、易于理解，便于快速判断增长趋势。这些基准函数都有明确的大小关系，便于对算法效率进行严格分类与对比。

绝大多数常用算法的复杂度恰好与这些基准函数匹配：

阶的类型	基准函数	典型算法 / 操作
常数阶	1	常量操作、数组元素访问
对数阶	$\log n$	二分查找
线性阶	n	线性遍历
线性对数阶	$N \log n$	高效排序（归并、快速排序）
多项式阶	n^2, n^3	双重循环、简单动态规划
指数阶	2^n	暴力枚举、穷举搜索

例 6.6：复杂度阶与算法示例

(1) 函数增长阶示例

设函数 $f(n)=n^2+n$，则 $f(n)=\Theta(n^2)$，表明 $f(n)$与 n^2 同阶；

设函数 $g(n)=n\log n$，则 $g(n)=O(n^2)$，表明 $g(n)$ 的增长阶不超过 n^2。

(2) 算法最坏情况时间复杂度示例

二分搜索：

$W(n)=\Theta(\log n)$，表示其最坏情况时间复杂度函数 $W(n)$与基准函数 $\log n$ 同阶，增长阶精确相等。

$W(n)=O(\log n)$，表示其最坏情况时间复杂度函数 $W(n)$的增长阶不超过 $\log n$，该描述仅给出上界，不够精确。

归并排序：

$W(n)=\Theta(n\log n)$，表示其最坏情况时间复杂度函数 $W(n)$与基准函数 $n\log n$ 同阶，增长阶精确相等。

$W(n)=O(n\log n)$，表示其最坏情况时间复杂度函数 $W(n)$的增长阶不超过 $n\log n$，该描述仅给出上界，不够精确。

Θ（紧确界、同阶）能够精确完整地刻画函数增长量级，真实反映算法复杂度的实际趋势，结论严谨，但需同时确定上下界，推导难度较大；O（上界、不超过）只需确定上界，推导简便、应用广泛，是算法分析中最常用的表示方法，但其描述相对粗略，可能存在上界过松、精度不足的问题。

6.1.2 函数的像与原像

函数的定义域是函数的输入来源，陪域是函数理论上可能到达的集合，而像是实际能够到达的集合。函数的像可以精确描述函数的覆盖能力，清晰反映函数能取到哪些值、取不到哪些值，以及哪些值永远无法达到。“像”一词专指函数实际能取到的所有输出构成的集合，不像“值域”那样容易与陪域混淆。

像可精确定义函数的满射，辅助刻画单射、双射及可逆映射等映射特性，是现代数学中描述映射实际可达范围的标准语言，也是研究更抽象数学结构的基础起点。

定义 6.10：函数的像与原像

设函数 $f: A\to B, A_1\subseteq A, B_1\subseteq B$，称

$f(A_1)=\{ f(x) \mid x\in A_1 \}$ 为 A_1 在 f 下的像，特别地，当 $A_1=A$ 时，$f(A)$ 称为函数的像。

$f^{-1}(B_1)=\{ x \mid x\in A \wedge f(x)\in B_1\}$ 称为集合 B_1 在 f 下的完全原像（逆像）。

$f^{-1}(B_1)\neq$A1

子集 A_1 在 f 下的像 $f(A_1)$，是从定义域 A 中取子集 A_1 经函数 f 映射得到的集合，该集合是陪域 B 的子集，即 $f(A_1)\subseteq B$。子集 B_1 在 f 下的完全原像 $f^{-1}(B_1)$，是从陪域 B 中取子集 B_1，在定义域 A 中确定所有满足 $f(x)\in B_1$ 的元素 x 构成的集合，该集合是定义域 A 的子集，即 $f(A_1)\subseteq$A。这种双向描述既能完整刻画函数的覆盖范围与取值情况，又能精确刻画元素间的对应关系。

当 $f(A_1) = B_1$ 时，由于函数可能存在多对一映射，对 A_1 先取像再取完全原像，会把所有映射到 B_1 的元素都包含进来，这时只能确定 $A_1\subseteq f^{-1}(B_1)$，即 $A_1\subseteq f^{-1}(f(A_1))$，而不能得出 $A_1= f^{-1}(B_1)$。同时，根据完全原像与像的复合性质，有 $f(f^{-1}(B_1))\subseteq B_1$，即对 B_1 先取完全原像再映射回去，所得集合仍包含于 B_1。

例 6.7：求函数的像与原像

设函数 $f:A\to B$，其中 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b,c\}$，且 $f(1)=a, f(2)=a, f(3)=b$。

（1）取 $A_1=\{1\}$，则 A_1 在 f 下的像 $f(A_1)=f(\{1\})=\{a\}$， 于是其完全原像 $f^{-1}(f(\{1\}))= f^{-1}(\{a\})=\{1,2\}$。子集 $A_1=\{1\}$的像{a}再取完全原像后得到了集合{1,2}，也就是$\{1\}\subsetneq\{1,2\}$，这说明 $A_1\subsetneq f^{-1}(f(A_1))$。

（2）取 $B_1=\{b,c\}$，则 $f^{-1}(B_1)= f^{-1}(\{b,c\})=\{3\}$,于是其像 $f(f^{-1}(\{b,c\}))=f(\{3\})=\{b\}$, 也就是$\{b\}\subsetneq\{b,c\}$，这说明 $f(f^{-1}(B_1))\subsetneq B_1$。

6.1.3 函数的构造

上一节从元素与元素之间的关系（元素视角）给出了函数性质的原始定义。从像与完全原像视角（集合视角），其关注点是子集 A_1、B_1 在映射下的变化，是函数性质的集合刻画（等价定义）。

1）单射、满射、双射函数的像与完全原像

设 $f:A\to B$ 为函数，$A_1\subseteq A, B_1\subseteq B$。

（1）任意函数都满足的基础性质：$A_1\subseteq f^{-1}(f(A_1))$，$f(f^{-1}(B_1))\subseteq B_1$

（2）f 是单射$\Leftrightarrow$ 对任意 $A_1\subseteq A$,有 $A_1=f^{-1}(f(A_1))$。也就是说，A_1 先取像再取完全原像，能精确还原，能精准还原，集合 A_1 不会扩大。

（3）f 是满射$\Leftrightarrow$ 对任意 $B_1\subseteq B$，有 $f(f^{-1}(B_1))= B_1$。也就是说，B_1 先取完全原像再取像，能精确还原，集合 B_1 不会缩小。

（3）f 是双射$\Leftrightarrow$ 既是单射又是满射，因此对任意 $A_1\subseteq A, B_1\subseteq B$，有 $A_1=f^{-1}(f(A_1))$，$f(f^{-1}(B_1))= B_1$，即像与完全原像双向都能完全还原。

例 6.8：断以下函数是否为单射、满射或双射，并解释原因。

（1） $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = -x^2+2x-1$

解: 当 $x=0$ 和 $x=2$ 时，都有 $f(x) = -1$，即不同的自变量对应了相同的函数值，因此该函数不是单射。函数最大值为 0，无法取到所有实数，故不是满射。因此也不是双射。

（2）$f: \mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x, \mathbb{Z}^+$，其中 $\mathbb{Z}^+$ 是正整数集。

解: 对任意不同的正整数 $x_1\neq x_2$，都有 $\ln x_1 \neq\ln x_2$，即不同自变量对应不同函数值，因此该函数是单射。值域仅为 $\{\ln 1,\ln 2,\ln 3,\cdots\}$，不能取遍全体实数集 $\mathbb{R}$，故不是满射。因此也不是双射。

（3）$f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=\lfloor x\rfloor$（向下取整函数）

解: 存在不同实数对应同一整数，例如 $f(1.2)=1$, $f(1.5)=1$，因此该函数不是单射。对任意整数 $n\in\mathbb{Z}$，取 $x=n$ 有 $f(\mathbb{Z})=n$，故是满射。因此不是双射。

（4）$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$

解: 对任意不同实数 $x_1\neq x_2$，都有 $2x_1+1\neq 2x_2+1$，即不同自变量对应不同函数值，因此该函数是单射。对任意 $y\in\mathbb{R}$，存在 $x=\frac{y-1}{2}$ 使得 $f(x)=y$，故是满射。因此也是双射。

（5）$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$，其中 $\mathbb{R}^+$ 是正实数集。

解: 存在不同的正实数对应相同的函数值，例如$f(2)=\frac{5}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$，因此该函数不是单射。函数最小值为 2，无法取到 (0,2) 内的正实数，故不是满射。因此也不是双射。

2）函数的构造

函数的构造，本质是明确如何定义、描述、判断并构建一个合格的函数，其核心内容包括：①确定函数的定义域 A 与陪域 B；②给出具体的对应规则 f；③确保满足函数的唯一性要求（即对每个 $x\in A$，都有且只有一个 $y\in B$ 与之对应）；④判断函数是否为单射、满射、双射等特殊类型；⑤研究子集的像与完全原像的性质。最终构造出满足特定条件的函数。

函数的构造主要方法有直接定义、分段定义、复合与逆函数构造、按性质构造、有限集枚举构方法。直接定义法通过明确定义域、陪域与对应规则直接构造函数；分段定义法对定义域不同部分分别给出对应规则；复合与逆函数构造法由已知函数通过复合或求逆得到新函数；按性质构造法根据单射、满射、双射等要求设计满足条件的函数；有限集枚举构造法对有限集合直接列出每个元素的对应关系来确定函数。下面通过示例说明几种常见的构造方法。

例 6.9：枚举配对法（有限集一一对应构造法）构造双射函数

枚举配对法（有限集一一对应构造法）属于有限集枚举构造法，是在有限集合之间构造双射函数的方法。通过列出定义域与陪域中所有元素，再将它们一一配对，直接建立起一一对应的映射关系，从而得到双射函数。

设 $A=\mathcal{P}(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

解：$A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。

B 是从 {1,2,3} 到 {0,1} 的全体函数构成的集合，即 $B=\{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$，其中：

$f_0=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>\}$，$f_1=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>\}$，$f_2=\{<1,0>,<2,1>,<3,0>\}$，

$f_3=\{<1,0>,<2,1>,<3,1>\}$，$f_4=\{<1,1>,<2,0>,<3,0>\}$，$f_5=\{<1,1>,<2,0>,<3,1>\}$，

$f_6=\{<1,1>,<2,1>,<3,0>\}$，$f_7=\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$。

定义函数 $f:A\to B$：

$f(\varnothing)=f_0$，$f(\{1\})=f_1$，$f(\{2\})=f_2$，$f(\{3\})=f_3$，$f(\{1,2\})=f_4$，$f(\{1,3\})=f_5$，$f(\{2,3\})=f_6$，$f(\{1,2,3\})=f_7$

该函数将 A 中的每个子集映射为它在 {1,2,3} 上的特征函数。例如：$f(\{2\})=f_2$，因为子集 {2} 中只有元素 2，对应的特征取值为 (0,1,0)。

结论：A 中的每个子集唯一对应 B 中的一个特征函数，且 B 中每个函数都唯一对应 A 中的一个子集，因此函数 $f:A\to B$ 既是单射也是满射，即为双射函数。

例 6.10：线性函数法构造双射函数

线性函数法属于直接定义法，是通过将两个实数区间的端点一一对应，构造出单调连续的一次函数，从而实现区间之间的一一映射。

设 A=[0,1]，$B=\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$，构造双射 f:A→B。

解：要将实数区间 A=[0,1] 映射到 实数区间 B，将区间端点对应，利用线性函数（一次函数）构造双射。

令 $f:[0,1]\to\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$，$f(x)=\frac{x+1}{4}$。

该线性函数是单调递增的一一对应，因此 f 为双射函数。

例 6.11：可数集枚举法（自然数配对法）构造函数

可数集枚举法（自然数配对法）属于按性质构造法，适用于从可数无限集（如 ℤ）到自然数集 ℕ 构造双射，核心是通过排序实现一一对应。

设 A=ℤ（整数集），B=ℕ（自然数集），构造双射 f:A→B。

解：将整数集 ℤ 中的元素按如下顺序排列，并与自然数集 ℕ 中的元素一一对应：

$$
\begin{array}{cccccccc}
\mathbb{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3\ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ldots
\end{array}
$$

此对应关系所表示的函数是：$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}, f(x)=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ -2x-1 & x<0\end{cases}$

单射证明：

若 $x_1, x_2\geqslant 0$，则 $f(x_1)=2x_1, f(x_2)=2x_2$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1=x_2$。

若 $x_1, x_2<0$，则 $f(x_1)=-2x_1-1, f(x_2)=-2x_2-1$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1=x_2$。

若 $x_1\geqslant 0, x_2<0$，则 $f(x_1)$为偶数，$f(x_2)$为奇数，不可能相等。因此 f 是单射。

满射证明：

对任意 $y\in\mathbb{N}$：

若 y 为偶数，取 $x=2y$，则 $x\geqslant 0$，且 $f(x)=2\times 2y=y$。

若 y 为奇数，取 $x=-2y+1$，则 $x<0$，且 $f(x)=-2\times(-2y+1)-1=y$。因此 f 是满射。

综上，f 既是单射又是满射，故为双射函数。

6.2 函数的复合与反函数

函数的复合与反函数，从函数运算与可逆性的角度，研究如何由已知函数构造新函数。函数复合通过映射的依次作用实现函数间的复合运算，反函数则通过逆映射刻画函数的可逆性。二者是构建与分析函数的重要方法，体现了函数在运算与变换下的基本规律。

6.2.1 复合函数

1）函数复合的基本定理及其推论

定理 6.1：函数复合的基本定理

设 F,G 是函数, 则复合函数 $F\circ G$ 也是函数, 且满足：

(1) 定义域：$\mathrm{dom}(F\circ G)=\{x \mid x\in\mathrm{dom}G \wedge G(x)\in\mathrm{dom}F\}$（即 x 必须在 G 的定义域内，且 $G(x)$ 必须在 F 的定义域内）；

(2) 复合运算规则：$\forall x\in\mathrm{dom}(F\circ G)$，有$(F\circ G)(x)=F(G(x))$（即先作用 G，再作用 F）。

函数的复合是关系复合的特殊情形，是在单值性与定义域合法性约束下的关系复合，其结果必定仍是函数。单值性约束要求复合后的关系对每个自变量至多对应唯一一个值；定义域合法性约束要求只有满足 $x\in \mathrm{dom}G \wedge G(x)\in \mathrm{dom}F$ 的元素 x 才能进入复合的定义域。

函数复合 $F\circ G$ 与关系复合 $F\circ G$ 的运算规则完全一致，都是先通过 G 得到中间元素，再通过 F 得到最终元素。

当 F,G 是任意二元关系时，$(x,z)\in F\circ G \Leftrightarrow \exists y, (x,y)\in G \wedge (y,z)\in \mathrm{F}$；

当 F,G 是函数时，有$(F\circ G)(x) = F(G(x))$ 。

二者运算规则相同，对象与约束不同。

2）函数复合的性质

定理 6.2：复合函数的映射性质保持定理

设 $f: B\to C, g: A\to B$ 为函数。

(1) 若 f、 g 都是满射, 则 $f\circ g: A\to C$ 是满射。

(2) 如果 f、 g 都是单射, 则 $f\circ g: A\to C$ 是单射。

(3) 如果 f、 g 都是双射, 则 $f\circ g: A\to C$ 是双射。

证明 (1)：欲证 $f\circ g: A\to C$ 是满射，只需证明：

对任意 $c\in C$，存在 $a\in A$，使得 $(f\circ g)(a)=c$。

任取 $c\in C$。由 $f: B\to C$ 是满射，存在 $b\in B$ 使得 $f(b)=c$。

由 $g: A\to B$ 是满射，存在 $a\in A$ 使得 $g(a)=b$。

于是$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(b)=c$。

故 $f\circ g$ 是满射。

证明(2)：欲证 $f\circ g: A\to C$ 是单射，只需证明：

对任意 $a_1,a_2\in A$，若 $(f\circ g)(a_1)=(f\circ g)(a_2)$，则 $a_1= a_2$。

设 $a_1,a_2\in A$ 满足$(f\circ g)(a_1)=(f\circ g)(a_2)$,即 $f(g(a_1))= f(g(a_2))$

由 f 是单射，得 $g(a_1)= g(a_2)$

再由 g 是单射，得 $a_1= a_2$。

故 $f\circ g$ 是单射。

定理 6.3：复合函数的恒等律

设 $f: A\to B$ 为函数，$I_A: A\to A$ 为集合 A 上的恒等函数，$I_B:B\to B$ 为集合 B 上的恒等函数，则 $f = f\circ I_B=I_A\circ f$ 。

即：函数与恒等函数复合，仍等于该函数本身；恒等函数是函数复合运算的单位元。

6.2.2 反函数

关系的逆运算是将有序对中的元素顺序互换，所得结果仍为关系。反函数是关系逆运算的特殊情形，当且仅当函数是双射时，其逆关系才满足函数的要求，此时称该逆关系为原函数的反函数。

定理 6.4：反函数的双射性定理

设 $f: A\to B$ 是双射函数, 则其逆关系 $f^{-1}: B\to A$ 也是双射函数，且 f^{-1} 仍是从 B 到 A 的双射。

该定理表明：双射函数的逆函数仍然是双射函数。

证明： 对任意 $x\in A$，有

①$(f\circ I_B)(x)=f(I_B(x))=f(x)$ 故 $f\circ I_B=f$

②$(I_A\circ f)(x)=I_A(f(x))=f(x)$ 故 $I_A\circ f=f$

因此, $f=f\circ I_B=I_A\circ f$

例 6.12：设 f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 3\\ -2 & x<3\end{cases}, g(x)=x+2$

求复合函数 $f\circ g$，$g\circ f$ 。若 f 和 g 存在反函数，求出它们的反函数。

解:

（1）求复合函数，按复合函数定义 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$、$(g\circ f)(x)=g(f(x))$，结合 f 和 g 的定义域分段代入并化简，得到分段形式的复合函数。

$f\circ g$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & x\geq 1\\ -2 & x<1\end{cases}$

$g\circ f$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=\begin{cases}x^2+2 & x\geq 3\\ 0 & x<3\end{cases}$

复合函数的分段区间由内层函数的取值范围决定, 但要刚好满足外层函数的分段条件。

（2）求反函数

f 是分段函数，且包含平方项 x^2，存在不同的 x 对应相同的函数值，不是单射。f 的值域也无法覆盖全体实数 $\mathbb{R}$，不是满射。故 f 不是双射，函数 f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 不存在反函数。

$g(x)=x+2$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一次函数，既是单射又是满射，即为双射，因此存在反函数。

令 $y=g(x)=x+2$， $x=y-2$，将 x 与 y 互换，得函数 g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的反函数为 g^{-1}: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g^{-1}(x)=x-2$。

定理 6.5：双射函数与其反函数的复合

设 $f: A\to B$ 是双射函数， 则

$f^{-1}\circ f=I_A$, $f\circ f^{-1}=I_B$

即：双射函数与它的反函数左复合、右复合分别等于对应集合上的恒等函数，且 I_A 与 I_B 一般不相等。

证明：

① 因为 $f: A\to B$ 是双射，由反函数的双射性定理，其反函数 f^{-1}:$B\to A$ 也是双射函数。

② 由函数复合的定义域与值域规则：$f^{-1}\circ f$:$A\to A$，$f\circ f^{-1}$:$B\to B$。

③ 任取 $x\in A$，设 $y=f(x)$。由反函数定义，有 $f^{-1}(y)=x$。

于是，$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x=I_A(x)$。

由 x 的任意性，得 $f^{-1}\circ f=I_A$。

④ 任取 $y\in B$，由反函数定义，存在唯一 $x\in A$ 使得 $x=f^{-1}(y)$ 且 $f(x)=y$。

于是$(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=f(x)=y=I_B(y)$。

由 y 的任意性，得 $f\circ f^{-1}=I_B$。

因此 $f^{-1}\circ f=I_A$, $f\circ f^{-1}=I_B$ 。

知识扩展提示词

1. 证明自然映射函数一定是满射的？
2. 如何利用第二类斯特林数 $S(n,k)$和贝尔数 B_n 求 n 元集合的划分个数？

第 6 章主要数学符号列表

序号	符号	含义	示例
1	$\rightarrow$	函数映射记号	$f{:}A\rightarrow B$，函数 f 是定义域 A 到陪域 B 的映射
2	$\Rightarrow$	逻辑推出	$f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$, 变量 a,b 的函数值相等, 则 a,b 必相等
3	$\subsetneq$	真子集	$A\subsetneq B$，集合 A 是 B 的真子集
4	B^A	B 上 A	从 A 到 B 的函数构成的集合记作 B^A
5	χ_A	集合 A 的特征函数	χ_A：$U\rightarrow\{0,1\}$，$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\0, & x\notin A\end{cases}$
6	O	算法最坏情况下，运行时间不会超过这个量级	$O(g(n))$：表示算法最坏情况下的时间复杂度不超过 $g(n)$量级，是上界。
7	Ω	算法最好情况下，运行时间至少是这个量级	$\Omega(g(n))$：表示算法最好情况下的时间复杂度至少为 $g(n)$ 量级，是下界
8	Θ	算法运行时间最好和最坏都在同一个量级里	$\Theta(g(n))$：表示算法的时间复杂度既不超过也不低于 $g(n)$量级，是同阶紧确界
9	$W(n)$	算法在最坏情况下执行的基本运算次数的最大值	若 $W(n)=O(g(n))$，则称 $W(n)$ 的增长阶不超过 $g(n)$ 的阶