目录

第 5 章 关系

集合描述有什么东西，关系描述这些东西之间如何联系。关系是构建数学结构的核心基石与关键纽带，与研究对象的集合、特殊关系的函数，共同构成了数学结构模型。

5.1 关系的定义与表示

本节聚焦关系的具体呈现形式及适配场景，常用表示方法有集合表示法、矩阵表示法、图形表示法。

5.1.1 关系的构成及语义空间

关系的定义域确定了关系是定义在哪些集合上，值域给出了关系映射到的集合范围。

定义 5.1：有序对

按特定顺序排列的一对元素 x 和 y 被称为有序对（或序列），记为$\langle x,y\rangle$。

有序对的表示形式主要有标准形式 $<a, b>$、圆括号简写形式(a, b)和集合定义形式$\{\{a\}, \{a, b\}\}$，三者所体现的元素组合与顺序特性完全一致。例如$<3, -4>$、$(3,-4)$和$\{\{3\}, \{3, -4\}\}$都表示平面内 x=3、y=−4 的笛卡尔坐标。

有序对的顺序确定性是指有序对中两个分量的顺序固定、不可颠倒，若 $a \neq b$，则$<a, b> \neq <b, a>$。有序对的相等判定唯一性是指两个有序对相等的充要条件是“对应分量完全相等”，即 $<a, b> = <c, d>$ 当且仅当 $a = c$ 且 $b = d$。

例 5.1：已知两个有序对$<x-1, 4>$与$<3, 2y+2>$相等，根据有序对的相等特性，求解未知量 x 和 y 的值。

解：根据有序对相等的充要条件，列出对应的方程组并求解

$x - 1 = 3$，$x = 4$

$4 = 2y + 2$，$y = 1$

代入原有序对验证，可得：

左边有序对：$<x-1, 4> = <3, 2y+2>$

结论：$x = 4$，$y = 1$。

1）笛卡尔积的及其性质

定义 5.2：笛卡尔积

设 A 和 B 为集合，A 与 B 的笛卡尔积记为 $A\times B$，$A\times B = \{<x,y> \mid x\in A \wedge y\in B\}$。

例如 $A=\{0, 1\}$, $B=\{a, b, c\}$

$A\times B=\{<0,a>,<0,b>,<0,c>,<1,a>,<1,b>,<1,c>\}$

$B\times A=\{<a,0>,<b,0>,<c,0>,<a,1>,<b,1>,<c,1>\}$

笛卡尔积的有序性：①笛卡尔积是有序对构成的集合：$(a,b) \neq (b,a)$；②一般不满足交换律：$A\times B\neq B\times A$，只有在 $A=B$ 或有空集的特殊情况下才可能相等。

空集与任何集合的笛卡尔积都是空集：$A\times\varnothing=\varnothing$，$\varnothing\times B=\varnothing$。

笛卡尔积对集合运算的分配律：

对并集：$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$，$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

对交集：$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$，$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

对差集：$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$

与包含关系的相容性：若 $A\subseteq C, B\subseteq D$ 则 $A\times B\subseteq C\times D$

基数乘法性质：对有限集合：$|A\times B| = |A|\cdot|B|$

2）*n* 维笛卡尔积

定义 5.3： *n* 维笛卡尔积

（1）*n* 元有序组是通过将 *n* 个元素 $x_1, x_2,\ldots$ 按特定顺序排列而成，记为$\langle x_1, x_2,\ldots,x_n\rangle$

（2）设 A_1，A_2，… 是集合。那么笛卡尔积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{\langle x_1, x_2,\ldots,x_n\rangle \mid x_i\in A_i, i=1,2,\ldots,n\}$ 被称为 *n* 维（*n* 元）笛卡尔积。

例如，(1,1,0) 是三维空间中点的笛卡尔坐标，且 $(1,1,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$。

在 AI 大模型中词向量空间中，每个词被表示成 *d* 维实数向量，每个句子有 *n* 个词，那么整个句子的表示空间就是：$\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\cdots\mathbb{R}^d$ (*n* 个)记作$(\mathbb{R}^d)^n$ 。

5.1.2 二元关系

二元关系是关系理论的核心与基础，是描述两个对象之间联系的最基本形式。等价关系、序关系、函数、图、映射等重要数学结构均以它为统一语言与底层框架，是从朴素集合论迈向结构数学的关键一步。

定义 5.4 **：** 二元关系

设 *A*、*B* 为集合。从 *A* 到 *B* 的二元关系 *R* 是笛卡尔积 $A\times B$ 的一个子集，即 $R\subseteq A\times B$。

二元关系 *R* 的记法：

$(a,b)\in R$ 记作 aRb，读作 "*a* 与 *b* 有关系 *R*"；

$(a,b)\notin R$ 记作 $a\not R b$，读作 "*a* 与 *b* 没有关系 *R*"

例如，对于关系 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle a,b\rangle\}$, $S=\{\langle 1,2\rangle,a,b\}$ 。*R* 是一个二元关系，但 *S* 不是二元关系，因为 *a* 和 *b* 不是有序对。我们可以写成 $1R2$、aRb、$a\not R c$ 等。

例 5.2： 分析下面关系

(1) $R=\{<x,y> \mid x,y\in\mathbb{N}, x+y<3\}=\{<0,0>, <0,1>, <0,2>, <1,0>, <1,1>, <2,0>\}$

R 是自然数集 $\mathbb{N}$ 上，由 $x+y<3$ 定义的对称二元关系。

(2) $C=\{<x,y> \mid x,y\in\mathbb{R}, x^2+y^2=1\}$ ，*C* 是实数集 $\mathbb{R}$ 上的对称二元关系，几何上表示平面单位圆。

(3) $R=\{<x,y,z> \mid x,y,z\in R, x+2y+z=3\}$，*R* 是实数集 $\mathbb{R}$ 上的三元关系，对应三维空间中平面 $x+2y+z=3$ 上的所有点。

1）二元关系与笛卡尔积子集

定义 5.5： 笛卡尔积子集与二元关系的等价关系

设 *A* 和 *B* 为集合。$A\times B$ 的任何子集若定义了一种二元关系，则称该子集为从 *A* 到 *B* 的二元关系。当 $A=B$ 时，称其为 *A* 上的二元关系。

笛卡尔积子集与二元关系有一一对应的等价关系，即所有二元关系都表现为笛卡尔积的子集，所有笛卡尔积的子集也都对应一个二元关系。

每个二元关系，就是按照某个给定的关系条件，从笛卡尔积中选取满足条件的有序对所构成的笛卡尔子集。若$|A|=n$，$|B|=m$，$|A\times B|=nm$，则 $|A\times B|$有 2^{nm} 种选择方式，每种选择对应一个从 *A* 到 *B* 的二元关系 *R*。

2）集合 *A* 上二元关系 *R* 的性质

二元关系通过 5 个核心性质描述集合 A 上二元关系的结构特征。自反性、反自反性描述了元素自身的行为；对称性、反对称性描述了两个元素之间是否有方向、是否对等；传递性描述了描述三个及以上元素之间能否延伸、能否推导。

定义 5.6：集合 A 上二元关系 R 的性质

设 A 为任意集合，R 是集合 A 上的二元关系，即 $R\subseteq A\times A$。

若对所有 $x\in A$，都有 $(x,x)\in R$，则称关系 R 在 A 上是自反的，形式化为$\forall x\in A, (x,x)\in R$。

若对所有 $x\in A$，都有 $(x,x)\notin R$，则称关系 R 在 A 上是自反的，形式化为$\forall x\in A, (x,x)\notin R$。

若对所有 $x,y\in A$，只要$(x,y)\in R$，就必有都有 $(y,x)\in R$，则称关系 R 在 A 上是对称的，形式化为$\forall x,y\in A,\ ((x,y)\in R\rightarrow(y,x)\in R)$。

若对所有 $x,y\in A$，只要$(x,y)\in R$ 且 $(y,x)\in R$，就必有 $x=y$，则称关系 R 是反对称的，形式化为$\forall x,y\in A,\ ((x,y)\in R\wedge(y,x)\in R\rightarrow x=y)$。

若对所有 $x,y,z\in A$，只要$(x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in R$，就必有$(x,z)\in R$，则称关系 R 是传递的，形式化为 $x,y,z\in A,\ ((x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\rightarrow(x,z)\in R)$。

这五个核心性质炼出二元关系的结构化特征，它们的不同组合可以严格定义等价关系、偏序关系等典型关系，实现对二元关系的分类、分析与应用。

3）典型的二元关系

定义 5.7：全域关系与恒等关系

设 A 为任意集合，集合 A 上的全域关系 E_A 定义为：$E_A=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$

集合 A 上的恒等关系 I_A 定义为：$I_A=\{\langle x,x\rangle \mid x\in \mathrm{A}\}$，恒等关系也叫相等关系 或全恒等关系。

例 5.3：微信群集合上的全域关系与恒等关系

设 3 人微信群集合 A={沐辰, 若瑶, 宇泽}，

全域关系 $E_A = A\times A$，表示群里任意两个人都可以互相发消息、聊天。

恒等关系 I_A = ={⟨沐辰,沐辰⟩, ⟨若瑶,若瑶⟩, ⟨宇泽,宇泽⟩}，　表示仅自己和自己互动。

定义 5.8：小于等于关系 L_A、整除关系 D_B 和包含关系 $R_\subseteq$

设 A 为实数集 $\mathbb{R}$ 的子集，B 为非零整数集 $\mathbb{Z}^+$ 的子集，$\mathcal{A}$为一集合族。小于等于关系 L_A、整除关系 D_B 和包含关系 $R_\subseteq$定义如下：

$L_A=\{<x,y>| x,y\in A\wedge x\le y\}$，其中 $A\subseteq\mathbb{R}$，$\mathbb{R}$ 是实数集。

$D_B=\{< x,y >| x,y\in B\wedge x$ 整除 $y\}$，其中 $B\subseteq \mathbb{Z}*$，$\mathbb{Z}*$是非零整数集。

$R_\subseteq=\{< x,y >| x,y\in \mathcal{A}\wedge \mathrm{x}\subseteq \mathrm{y}\}$，其中 $\mathcal{A}$是一个集合族。

L_A、D_B 和 $R_\subseteq$ 是三个最具代表性的关系实例，小于等于关系 L_A 体现了集合中任意两个元素都可比较；整除关系 D_B 体现了不是任意两个数都能整除比较；包含关系 $R_\subseteq$则将集合之间的包含次序统一纳入关系理论框架中。它们的目的是从具体实例出发，把集合从单纯的无序结构，引入到带有次序、层次的有序结构中，为后续学习更一般的有序关系做直观铺垫。

例 5.4：求集合 A 上的 L_A、D_A 和 $R_\subseteq$关系。

设集合 $A=\{1,2,3\}$，集合族 $\mathcal{A}=\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$。

小于等于关系 $L_A=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\le y\}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

整除关系 D_A={⟨ x,y ⟩｜x,y∈A∧x 整除 y}={⟨1,1⟩,⟨1,2⟩,⟨1,3⟩,⟨2,2⟩,⟨3,3⟩}

包含关系 $R_{\subseteq}$={⟨X,Y⟩｜X,Y∈$\mathcal{A}$∧X⊆Y}={⟨{1},{1}⟩,⟨{1},{1,2}⟩,⟨{2},{2}⟩,⟨{2},{1,2}⟩,⟨{1,2},{1,2}⟩}

5.1.3 关系矩阵与关系图

二元关系可以从逻辑定义、数值计算、直观图形三个角度进行刻画，关系矩阵表示用 0-1 矩阵将关系转化为数值结构，把元素间的有无关系变成可计算、可存储的数学对象。关系的图表示用点和有向边可视化二元关系，直观展示元素之间的连接、层次与顺序，帮助理解关系的整体结构，是从抽象到直观的重要桥梁。

定义 5.9：关系矩阵

若 A={ $a_1, a_2,\ldots, a_m$ } ，B={ $b_1, b_2,\ldots, b_n$ }，R 是从 A 到 B 的二元关系，则 R 的关系矩阵 $M_R=[m_{ij}]_{m\times n}$定义为： $m_{\mathrm{ij}}=\begin{cases}1, 若\langle a_i,b_j\rangle\in R,\\ 0, 若\langle a_i,b_j\rangle\notin R\end{cases}$

其中：行对应集合 A 中的元素 a_i，列对应集合 B 中的元素 b_j。

定义 5.10：关系图

若 A={ $a_1, a_2,\ldots, a_m$ }，R 是集合 A 上的二元关系，则 R 的关系图定义为：

①用**顶点**表示集合 A 中的每个元素；

②若 $\langle a_i,a_j\rangle$∈R，则从顶点a_i到顶点 a_j 画一条有向边；

③若 $\langle a_i,a_i\rangle$∈R，则在顶点 a_i 处画一个自环。

由上述顶点和有向边构成的有向图，称为关系 R 的关系图。

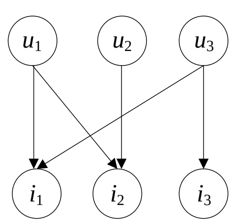
关系矩阵既可表示集合 A 到集合 B 的关系，也可表示集合 A 上的关系，而关系图通常只用于表示集合 A 上的关系。关系矩阵可将二元关系代数化，便于计算机处理、数值运算与性质判定；关系图使二元关系可视化，便于直观观察结构、理解元素间的次序与关联。

例 5.5：用户 - 商品偏好关系

设：用户集合 U={u_1, u_2, u_3}，商品集合 I={ i_1, i_2, i_3}。偏好关系 R：用户对商品有偏好，则⟨u,i⟩∈R。已知 R={⟨ u_1, i_1⟩,⟨ u_1, i_2⟩,⟨ u_2, i_2⟩,⟨ u_3, i_1⟩,⟨ u_3, i_3⟩}

关系矩阵：$M_R=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

关系图 G_R 为：



5.2 关系的运算

关系运算以二元关系为操作对象，通过确定的规则实现关系的转换与重构，揭示关系之间的逻辑关联与演化规律。其主要内容包括关系的集合运算、关系特有的逆运算与复合运算，以及使关系满足自反、对称、传递的闭包运算

5.2.1 关系的基本运算

1）二元关系的基本结构

前面我们已经介绍了二元关系基本结构中的定义和三种表示法，下面引入二元关系最基础的集合结构，它们分别是定义域(Domain)、值域(Range/ Image)和域(Field / Base set) 。

定义 5.11：定义域、值域和域

设 R 是从集合 A 到集合 B 的二元关系（$R \subseteq A \times B$）。

R 的定义域： $\mathrm{dom}R = \{x \mid \exists y\ (\langle x,y\rangle \in R)\}$

R 的值域： $\mathrm{ran}R = \{y \mid \exists x\ (\langle x,y\rangle \in R)\}$

R 的域： $\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$

R 的定义域是所有作为 R 中有序对第一个元素构成的集合。R 的值域是所有作为 R 中有序对第二个元素构成的集合。R 的域是 R 的定义域与值域的并集。

例 5.6：定义域、值域和域示例

设关系 $R=\{\langle a,\{b\}\rangle, \langle c,d\rangle, \langle\{a\},\{d\}\rangle, \langle d,\{d\}\rangle\}$

定义域：$\mathrm{dom}R=\{a,c,\{a\},d\}$

值域：$\mathrm{ran}R=\{\{b\},d,\{d\}\}$

域：$\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{ran}R=\{a,c,\{a\},d,\{b\},\{d\}\}$

2）二元关系的特有运算

定义 5.12：关系的逆运算

设 R 是从集合 A 到集合 B 的二元关系，即 $R\subseteq A\times B$。

关系 R 的逆关系（inverse relation），记作 R^{-1}，是从 B 到 A 的二元关系，它由交换 R 中所有有序对的两个元素得到。其集合表示为：$R^{-1} = \{\langle y,x\rangle \mid \langle x,y\rangle \in R\}$

定理 5.1：逆关系的基本性质

设 F 是任意二元关系，则有：

① $(F^{-1})^{-1}= F$

② $\mathrm{dom}\, F^{-1}=\mathrm{ran}\, F$, $\mathrm{ran}\, F^{-1}=\mathrm{dom}\, F$

(1) 证明 $(F^{-1})^{-1}=F$

证：对任意有序对 $\langle x,y\rangle$，由逆关系定义：

$\langle x,y\rangle\in(F^{-1})^{-1}\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in F^{-1}\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in F$

由集合相等公理可得：$(F^{-1})^{-1}=F$

(2) 证明 $\mathrm{dom}\, F^{-1}=\mathrm{ran}\, F$

证：对任意 x，$x\in\mathrm{dom}\, F^{-1}\Leftrightarrow\exists y(\langle x,y\rangle\in F^{-1})\Leftrightarrow\exists y(\langle y,x\rangle\in F)\Leftrightarrow x\in\mathrm{ran}F$

因此：$\mathrm{dom}\, F^{-1}=\mathrm{ran}\, F$

同理可证：$\mathrm{ran}\, F^{-1}=\mathrm{dom}F$。

二元关系 R 的逆运算操作新构成的关系 R^{-1} 称为 R 的逆关系，其定义域和值域在逆运算下呈现出互逆互换的关系，也就是 $\mathrm{dom}(R^{-1})=\mathrm{ran}R$，$\mathrm{ran}(R^{-1})=\mathrm{dom}R$。对逆关系再次进行逆运算，得到原关系，即$(R^{-1})^{-1}=R$，这表明逆运算具有自反性。

定义 5.13：关系的复合运算

设 R 是从集合 A 到集合 B 的二元关系，S 是从集合 B 到集合 C 的二元关系，则 R 与 S 的复合关系（composition of R and S），记作 $S\circ R$，是从 A 到 C 的二元关系：

$R\circ S = |<x,z> \mid \exists\, y\, (<x,y>\in R\wedge <y,z>\in S)\ \}$

其中，y 是满足 “x 与 y 有 R 关系，且 y 与 z 有 S 关系” 的中间元素。

例 5.7：关系的逆运算与复合运算示例

设关系 $R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$。

逆关系 $R^{-1}=\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$。

复合关系 $R\circ S$ 寻找所有满足 $\langle x,y\rangle\in S$ 且 $\langle y,z\rangle\in R$ 的有序对 $\langle x,z\rangle$：

$R\circ S=\{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

复合关系 $S\circ R$ 寻找所有满足 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,z\rangle\in$ S 的有序对 $\langle\ x,z\ \rangle$：

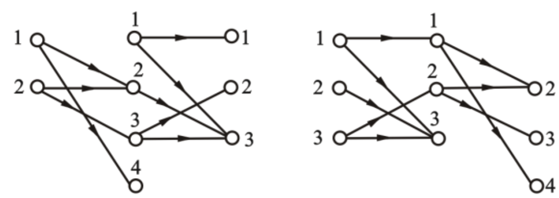
$S\circ R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$。

逆运算和复合运算之所以是关系的特有运算，是因为它们利用了二元关系作为序偶集合的特殊结构，刻画了关系的方向性与传递性，这是普通集合运算无法做到的。

例 5.8：关系图法求解关系复合

关系图通常是指一个关系的静态表示，也可以用关系图作为工具，体现求解关系复合这个动态过程。

设：$R=\{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$，$S=\{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$



$R\circ S$　　　　$S\circ R$

$R\circ S =\{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

$S\circ R =\{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$

定理 5.2：关系复合运算核心性质

设 F,G,H 为任意二元关系，则有：

复合运算的结合律：$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

复合关系的逆（反序律）：$(F\circ G)^{-1}= G^{-1}\circ F^{-1}$

证明：复合运算的结合律

对任意有序对<x,y>，$<x, y>\in(F\circ G)\circ H$

$\Leftrightarrow \exists t\, (<x, t>\in F\circ G \wedge <t, y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\, (\exists s\, (<x, s>\in F \wedge <s, t>\in G) \wedge <t, y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\, \exists s\, (<x, s>\in F \wedge <s, t>\in G \wedge <t, y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists s\, (<x, s>\in F \wedge \exists t\, (<s, t>\in G \wedge <t, y>\in H))$

$\Leftrightarrow \exists s\, (<x, s>\in F \wedge <s, y>\in G\circ H)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in F\circ(G\circ H)$

由集合相等公理可得：$(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

定理 5.3：恒等关系的复合性质

设 R 是集合 A 上的一个关系，I_A 是集合 A 上的恒等关系，则 $R\circ I_A = I_A\circ R = R$。

证明：

对任意有序对<x,y>, $<x, y>\in R\circ I_A$

$<x, y>\in R\circ I_A \Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in R\wedge <t, y>\in I_A)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in R\wedge t=y\wedge y\in A)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in R$

由集合相等公理可得：$R\circ I_A=R.$

同理可证：$I_A\circ R=R.$

5.2.2 关系幂运算

关系幂是同一个关系与自身反复复合所得到的二元关系，用于描述指定长度的路径、刻画元素间的可达性，是定义传递闭包与构建关系代数体系的基础。关系幂运算是定义、计算与操作关系幂的一整套运算规则。

定义 5.14：关系的幂运算

设 R 是集合 A 上的一个关系，n 是一个自然数。R 的 n 次幂定义如下：

(1) $R^0 = \{<x,x> \mid x\in A\} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n\circ R$

1）关系幂运算的两条基本性质

集合 A 上的任意关系 R_1 和 R_2，我们有 $R_1^0 = R_2^0 = I_A$，也就是说任何关系的 0 次幂都等于恒等关系。

集合 A 上的任意关系 R，我们有 $R^1 = R$，也就是说任何关系的 1 次幂都等于自身。

关系的 0 次幂表示长度为 0 的路径（自身可达），I_A 作为复合运算的单位元，表示自身可达。1 次幂表示长度为 1 的路径，保证幂运算与常规指数形式统一样具备代数结构，便于运算与推理。

2）用布尔关系矩阵计算关系幂

关系幂运算有三种方法，分别是按关系复合定义计算、用布尔关系矩阵乘法计算以及关系图路径法（图解法）求解。

设 R 是有限集合 A 上的二元关系，M_R 是 R 的关系矩阵。

①写出关系 R 的布尔矩阵 M_R

若 $\langle i,j\rangle\in R$，则 $M_R(i,j)=1$，否则 $M_R(i,j)=0$

②明确布尔运算规则

布尔乘：1∧1=1，其余为 0

布尔加：0∨0=0，其余为 1

③用布尔矩阵复合计算幂

关系幂对应布尔矩阵的幂：

$M_{R^2} = M_R\circ M_R$

$M_{R^3} = M_{R^2}\circ M_R$

$\vdots$

$M_{R^n} = \underbrace{M_R\circ M_R\circ\cdots\circ M_R}_{n}$

矩阵复合的具体计算：第 i 行与第 j 列对应元素先“布尔乘”，再“布尔加”。

④由矩阵M_{R^n}还原出关系 R^n

若$M_{R^n}(i,j)=1$，则 $\langle i,j\rangle\in R^n$, 否则不属于 R^n。

例 5.9： 设 $A=\{a, b, c, d\}$, $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$,求关系 R 的各次幂，并用关系矩阵和关系图表示。

解：

①关系 R 的布尔矩阵

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

②求 $R^2=R\circ R$ 的布尔矩阵$M_{R^2}=M_R\odot M_R$

$$M_{R^2}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

对应关系 $R^2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle\}$

③求 $M_{R^3}=M_{R^2}\odot M_R$ 、$M_{R^4}=M_{R^3}\odot M_R$的布尔矩阵

$$M_{R^3}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M_{R^4}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=M_{R^2}$$

对应关系 $R^3=\{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$、$R^4=R^2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle\}$

可见从这里开始循环：$R^4=R^2$, $R^5=R^3$, $R^6=R^2$,…

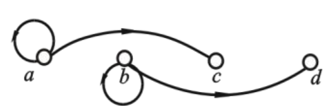
④求 $R^0=I_A$ 的布尔矩阵M_{R^0}

$$M_{R^0}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

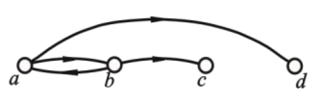
⑤关系图

R^0

$R^1=R$



$R^2=R^4$



$R^3=R^5$

在关系图中，R 是长度为 1 的路径，R^2 是长度为 2 的路径，R^3 是长度为 3 的路径，R^0 描述长度为 0、只包含自己到自己的路径。R 的更高次幂在 R^2、$R3$ 之间循环。关系图中路径长度对应关系复合次数，长度为 n 对应关系的 n 次幂 R^n。它们刻画元素之间一步或多步关联，体现关系的迭代与传递特征。

在用关系图路径法（图解法）求解关系幂 R^n 时，观察 R 关系图中任意两点 x 和 y，若从 x 到 y 存在长度恰好为 n 的路径，则 $\langle x,y\rangle\in R^n$。

3）关系幂的基本性质

n 个元素的有限集 A 的笛卡尔积 共有 n^2 个有序对，其子集个数、也就是关系总数的上限为 2^{n^2} 个。这使得有限集合上的关系幂不可能无限增多，必然出现重复、循环与稳定。这些性质为可达性判断与传递闭包的构造提供了可靠的理论基础。

定理 5.4：关系幂的周期性定理（循环性定理、稳定性定理）

设 A 为 n 元集, R 是 A 上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$。

证：

（1）集合 A 上的关系 R 是 $A\times A$ 的子集，$A\times A$ 共有 n^2 个有序对。

（2）因此 A 上最多只有 2^{n^2} 个不同的二元关系。

（3）关系幂序列 $R^0, R^1, R^2,\cdots$ 有无穷多项，但只能在这有限个不同的关系中取值（关系幂的有限状态约束），由鸽巢原理，必存在 $s\neq t$ 使得 $R^s = R^t$。

4）幂运算的合成

关系 R 和 S 的合成 $R\circ S$ 是定义在两个关系的基本运算，本质是将两个关系的有序对前后连接，刻画元素的传递联系。关系幂运算是同一关系与自身连续进行多次合成，幂运算合成与关系幂运算本质一致。关系合成是基础，幂运算合成是关系合成的自迭代特例，关系幂运算是幂运算在关系领域的具体体现，且等价于幂运算合成。

定理 5.5： 关系复合的指数运算性质

设 R 是 A 上的关系, $m, n\in$N, 则

(1) $R^m\circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证： 用归纳法

(1) 对于任意给定的 $m\in\mathbb{N}$, 施归纳于 n。

若 n=0, 则有 $R^m\circ R^0 = R^m\circ I_A= R^m = R^{m+0}$

假设 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$, 则有 $R^m\circ R^{n+1} = R^m\circ(R^n\circ R) = (R^m\circ R^n)\circ R = R^{m+n+1}$,

所以对一切 $m, n\in\mathbb{N}$ 有 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$。

(2) 对于任意给定的 $m\in\mathbb{N}$, 施归纳于 n。

若 $n = 0$, 则有 $(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m\times 0}$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有 $(R^m)^{n+1} = (R^m)^n\circ R^m = (R^{mn})\circ R^m = R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$

所以对一切 $m, n\in\mathbb{N}$ $(R^m)^n = R^{mn}$。

定理 5.6：关系幂的最终周期性定理

设 A 为有限集合， R 是 A 上的关系。若则存在非负整数 s,t 满足 $s<t$，使得 $R^s=R^t$，那么有：

（1）对任意整数 $k\geqslant 0$，有 $R^{s+k} = R^{t+k}$（平移不变性）。

（2）对任意整数 $k\geqslant 0, i\geqslant 0$，有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $p = t - s$ 称为周期。

（3）设 $S = \{R^0, R^1, \ldots, R^{t-1}\}$，则对任意非负整数 q, 有 $R^q\in S$（幂序列的有限性）

证：

（1）$R^{s+k} = R^s\circ R^k = R^t\circ R^k = R^{t+k}$ （代入已知 $R^s=R^t$）

（2）对 k 进行归纳。若 k=0，则有 $R^{s+0p+i} = R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $p = t-s$，则

$R^{s+(k+1)p+i} = R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i}\circ R^p$

$= R^{s+i}\circ R^p$ （利用假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$）

$= R^{s+p+i} = R^{s+t-s+i}$ （代入 $p=t-s$）

$= R^{t+i} = R^{s+i}$（代入 $t= p+s$，p 为周期）

根据数学归纳法原理，该命题得证。

（3）对任意非负整数 q，由带余除法，存在非负整数 k 与整数 i 使得：

$q=s+kp+i$，其中 $0\le i\le p-1$。

由周期性 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$ ，得 $R^q = R^{s+i}$

又 $p=t-s$，故 $0\le i<p \Longrightarrow s\le s+i<s+p-1=t-1$。

因此 $R^{s+i}\in\{R^0, R^1, \ldots, R^{t-1}\}= S$，即 $R^q\in S$ 成立。

5.3 关系的性质

关系拥有的属性（关系的性质）是用来描述二元关系结构特征的标准体系，不是所有关系天生就必须全部具备，特定的关系可能满足其中几个性质。自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性是 5 个重要的性质。

5.3.1 关系性质的定义

1）关系的自反性与反自反性

自反性的引入有助于描述那些元素与其自身保持某种特定关系的场景，反自反性用于描述那些元素不可能与自身保持特定关系的场景。

定义 5.15： 自反与反自反性

设 R 为集合 A 上的关系：

（1）若 $\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\in R)$, 则称 R 在 A 上是自反的。

（2）若 $\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)$, 则称 R 在 A 上是反自反的。

集合 A 上的典型自反关系：

①恒等关系：$I_A=\{(x,x)\mid x\in A\}$ （对任意集合，每个元素只和自己有关系）

②全域关系：$E_A=A\times A$ （对任意集合，任意两元素都有关系，自然包含 (x,x)）

③小于等于：$L_A=\{(x,y)\mid x\le y\}$ （对任意数集，$x\leqslant x$ 恒成立）

④大于等于：$G_A=\{(x,y)\mid x\ge y\}$ （对任意数集，$x\geqslant x$ 恒成立）

⑤整除关系：$D_A=\{(x,y)\mid x\mid y\}$ （对正整数集 $\mathbb{N}^+$，$x|x$ 恒成立）

⑥包含关系：$S=\{(X,Y)\mid X\subseteq Y\}$（对任意集族，$X\subseteq X$ 恒成立）

集合 A 上的典型反自反关系：

①小于关系 $R=\{(x,y)\mid x<y\}$（对任意数集，$x<x$ 不成立）

②大于关系 $R=\{(x,y)\mid x>y\}$（对任意数集，$x>x$ 不成立）

③不等关系 $R=\{(x,y)\mid x\neq y\}$（对任意集合，$x\neq y$ 不成立）

④真子集关系 $R=\{(X,Y)\mid X\subset Y\}$（对任意集族，$X\subset X$ 不成立）

例 5.10：设 $A = \{a, b, c\}$, R_1, R_2, R_3 是集合 A 上的关系，其中　$R_1 = \{<a,a>,<b,b>\}$, $R_2 = \{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>\}$, $R_3 = \{<a,c>\}$。判断 R_1, R_2, R_3 是否为自反关系或反自反关系。

解：

R_1：因$\langle c,c\rangle \notin R_1$，$R_1$ 不是自反的。

因$<a,a>,<b,b>\in R_1$，故 R_1 不是反自反的。

R_2：$<a,a>,<b,b>,<c,c>\in R_2$，满足对所有 $x\in A$ 都有 $\langle x,x\rangle\in R_2$，故 R_2 是自反的。

因$<a,a>,<b,b>,<c,c>\in R_2$，存在 $\langle x,x\rangle\in R_2$，故 R_2 不是反自反的。

R_3：$<a,a>,<b,b>,<c,c>\notin R_3$，故 R_3 不是自反的。

对所有 $x\in A$，均有 $\langle x,x\rangle\notin R_3$，满足反自反定义，故 R_3 是反自反的。

结论：

R_1：既不是自反的，也不是反自反的

R_2：自反的

R_3：反自反的

2）关系的对称性与反对称性

对称性与反对称性是从关系的方向特征这一视角，刻画集合中不同元素之间的关联结构。对称性反映关系是否双向平等、无向可逆，只要 x 与 y 有关系，y 与 x 就一定有关系。反对称性反映关系是否单向有序、不可互逆，保证不同元素之间不会同时存在双向关联，从而体现出先后、大小、包含等可比较的层次特征。

定义 5.16：关系的对称性与反对称性

设 R 为 A 上的关系,

(1) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge<x,y>\in R\rightarrow<y,x>\in R)$, 则称 R 为 A 上对称的关系。

(2) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge<x,y>\in R\wedge<y,x>\in R\rightarrow x=y)$, 则称 R 为 A 上的反对称关系。

集合 A 上的典型对称关系：

① 恒等关系：$I_A=\{(x,x)\mid x\in A\}$ （对任意集合，若$\langle x,y\rangle\in I_A$，必有$\langle y,x\rangle\in I_A$）

②全域关系：$E_A=A\times A$ （对任意集合，若$\langle x,y\rangle\in E_A$，必有$\langle y,x\rangle\in E_A$）

③相等关系：$R=\{(x,y)\mid x=y\}$（对任意集合，$x=y\Leftrightarrow y=x$，满足对称）

④不等关系：$R=\{(x,y)\mid x\neq y\}$（对任意集合，$x\neq y\Leftrightarrow y\neq x$，满足对称）

⑤同余关系：$R=\{(x,y)\mid x\equiv y(\mathrm{mod}\ n)\}$（$A$ 为数集，$x\equiv y\Rightarrow y\equiv x$，满足对称）

集合 A 上的典型反对称关系：

①恒等关系：$I_A=\{(x,x)\mid x\in A\}$（对任意集合 A，不同元素无双向关系，满足反对称）

②小于等于：$L_A=\{(x,y)\mid x\leq y\}$（$A$ 为数集，$x\leq y\wedge y\leq x\Rightarrow x=y$）

③大于等于：$G_A=\{(x,y)\mid x\geq y\}$（$A$ 为数集，$x\geq y\wedge y\geq x\Rightarrow x=y$）

④整除关系：$D_A=\{(x,y)\mid x\mid y\}$（$A$ 为正整数集 $\mathbb{N}^+$，$x\mid y\wedge y\mid x\Rightarrow x=y$）

⑤包含关系：$S=\{(X,Y)\mid X\subseteq Y\}$（$A$ 为任意集族，$X\subseteq Y\wedge Y\subseteq X\Rightarrow X=Y$）

例 5.11：设 $A=\{a,b,c\}$，R_1, R_2, R_3 , R_4 是集合 A 上的关系，其中 $R_1=\{<a,a>,<b,b>\}$，$R_2=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>\}$，$R_3=\{<a,b>,<a,c>\}$，$R_4=\{<a,b>,<b,a>,<a,c>\}$。判断 R_1, R_2, R_3 , R_4 是否为对称关系或反对称关系。

解：

对称性判断：

R_1满足若 $\langle x,y\rangle\in R_1$，则有 $\langle y,x\rangle\in R_1$，故 R_1是对称的。

R_2满足若 $\langle x,y\rangle\in R_2$，则有 $\langle y,x\rangle\in R_2$，故 R_2 是对称的。

R_3有$\langle a,b\rangle\in R_3$，但 $\langle b,a\rangle\notin R_3$，故 R_3不是对称的。

R_4有$\langle a,c\rangle\in R_4$，但 $\langle c,a\rangle\notin R_4$，故 R_4 不是对称的。

反对称性判断：

R_1满足若 $\langle x,y\rangle\in R_1$ 且$\langle y,x\rangle\in R_1$，则 $x=y$，故 R_1是反对称的。

R_2有$\langle a,b\rangle\in R_2$，$\langle b,a\rangle\in R_2$ 且 a≠b，故 R_2不是反对称的。

R_3中不存在 $\langle x,y\rangle\in R_3$ 且 $\langle y,x\rangle\in R_3$，且 $x\neq y$，故 R3 是反对称的。

R_4有$\langle a,b\rangle\in R_4$，$\langle b,a\rangle\in R_4$ 且 $a\neq b$，故 R_4不是反对称的。

结论：

R_1：既是对称的，也是反对称的

R_2：对称的，不是反对称的

R_3：不是对称的，是反对称的

R_4：既不是对称的，也不是反对称的

3）关系的传递性

传递关系是从路径延伸的视角，刻画元素间多级关联能否闭合。如果从 x 到 y、y 到 z 都存在直接关系，那么 x 到 z 也必须存在直接关系，让两步路径形成完整闭环，体现关系可传递、可推导、无断点的特征。

定义 5.17：集合 A 上的传递关系

设 R 是集合 A 上的一个关系。如果对于任意的 $x,y,z\in A$，都有

$\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R\rightarrow<x,z>\in R)$,则称 R 是集合 A 上的传递关系。

集合 A 上的典型传递关系：

① 恒等关系：$I_A=\{(x,x)\mid x\in A\}$（对任意集合，若 $\langle x,y\rangle\in I_A$ 且 $\langle y,z\rangle\in I_A$，则必有 $\langle x,z\rangle\in I_A$）

②全域关系：$E_A=A\times A$（对任意集合，任意 $\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in E_A$，都有 $\langle x,z\rangle\in E_A$）

③小于等于关系：$L_A=\{(x,y)\mid x\leqslant y\}$（$A$ 为数集，若 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant z$，则必有 $x\leqslant z$）

④大于等于关系：$G_A=\{(x,y)\mid x\geqslant y\}$（$A$ 为数集，若 $x\geqslant y$ 且 $y\geqslant z$，则必有 $x\geqslant z$）

⑤整除关系：$D_A=\{(x,y)\mid x\mid y\}$（$A$ 为正整数集 $\mathbb{N}^+$，若 $x\mid y$ 且 $y\mid z$，则必有 $x\mid z$）

⑥包含关系：$S=\{(X,Y)\mid X\subseteq Y\}$（$A$ 为任意集族，若 $X\subseteq Y$ 且 $Y\subseteq Z$，则必有 $X\subseteq Z$）

例 5.12：设 $A=\{a, b, c\}$, R_1, R_2, R_3是 A 上的关系，其中 $R_1=\{<a,a>,<b,b>\}$; $R_2=\{<a,b>,<b,c>\}$; $R_3=\{<a,c>\}$。判断 R_1, R_2, R_3是否为 A 上的传递关系。

解：

R_1：R_1中不存在使得 $\langle x,y\rangle\in R_1$ 且 $\langle y,z\rangle\in R_1$但 $\langle x,z\rangle\notin R_1$ 的情况，满足传递定义，故 R_1是传递的。

R_2：$\langle a,b\rangle\in R_2$，$\langle b,c\rangle\in R_2$，但 $\langle a,c\rangle\notin R_2$，故 R_2不是传递的。

R_3：R_3中不存在使得 $\langle x,y\rangle\in R_3$ 且 $\langle y,z\rangle\in R_3$但 $\langle x,z\rangle\notin R_3$ 的情况，满足传递定义，故 R_1是传递的。

结论：R_1是传递的，R_2不是传递的，R_3是传递的。

5.3.2 关系性质的判断方法

关系性质判断方法主要有定义法、集合等价判定法、关系图法和布尔矩阵判定法。定义法按定义逐条验证，集合等价判定法用集合包含、交、逆、复合判定，关系图法从有向图直观观察。布尔矩阵判定法根据关系布尔矩阵中元素的分布规律判断关系性质。

1）集合等价判定法

设 R 为 A 上的关系, 则

(1) R 在 A 上自反$\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

(2) R 在 A 上反自反$\Leftrightarrow$ $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R 在 A 上对称$\Leftrightarrow$ $R = R^{-1}$

(4) R 在 A 上反对称$\Leftrightarrow$ $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R 在 A 上传递$\Leftrightarrow$ $R \circ R \subseteq R$

该定理从集合运算与集合包含的视角，将关系的自反、反自反、对称、反对称、传递这五种性质统一转化为严格的集合等价条件，目的是用数学化、形式化、可直接验证的方式判定关系性质，使判断更规范、更严谨、更便于推理与证明。

证明：设 A 为集合，R 是 A 上关系，I_A 为恒等关系。

(1) R 自反 $\Leftrightarrow$ $I_A \subseteq R$

($\Leftarrow$)：任意 $x \in A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R$，故 R 自反。

($\Rightarrow$)：R 自反 $\Rightarrow \forall x \in A, \langle x,x\rangle \in R \Rightarrow I_A \subseteq R$。

(2) R 反自反 $\Leftrightarrow R \cap I_A = \varnothing$

($\Leftarrow$)：$R \cap I_A = \varnothing \Rightarrow$ 无 $\langle x,x\rangle \in R$，故 R 反自反。

($\Rightarrow$)：R 反自反 $\Rightarrow$ 无 $\langle x,x\rangle \in R \Rightarrow R \cap I_A = \varnothing$。

(3) R 对称 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

($\Leftarrow$)：$R = R^{-1}$，若 $\langle x,y\rangle \in R$，则 $\langle y,x\rangle \in R$，R 对称。

($\Rightarrow$)：R 对称 $\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in R \Rightarrow R = R^{-1}$。

(4) R 反对称 $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

($\Leftarrow$)：若 $\langle x,y\rangle \in R$ 且 $\langle y,x\rangle \in R$，则 $\langle x,y\rangle \in I_A \Rightarrow x = y$。

($\Rightarrow$)：R 反对称，则双向成立仅当 $x=y$，故交包含于 I_A 。

(5) R 传递 $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$

($\Leftarrow$)：$\langle x,y\rangle \in R, \langle y,z\rangle \in R \Rightarrow \langle x,z\rangle \in R \circ R \subseteq R$，传递。

($\Rightarrow$)：R 传递 $\Rightarrow \langle x,z\rangle \in R \circ R \Rightarrow \langle x,z\rangle \in R \Rightarrow R \circ R \subseteq R$。

上述证明采用定义证明法与集合推演相结合的方法，以关系性质的原始逻辑定义为依据，任取集合中的元素与有序对，通过集合包含、交、逆、关系复合的定义进行推理，分别从两个方向完成充要条件（$\Rightarrow$ 与 $\Leftarrow$） 的双向验证，从而将性质的逻辑定义严格转化为对应的集合等价条件，完成等价性证明。

2）关系图示法

关系图示法通过检查有向图的自环、双向边、单方向边、路径结构，快速直观地判断关系是否满足自反、反自反、对称、反对称与传递性。

关系图示法判断关系性质的主要步骤：

①画出关系的有向图：顶点表示集合元素，有向边表示关系中的有序对。

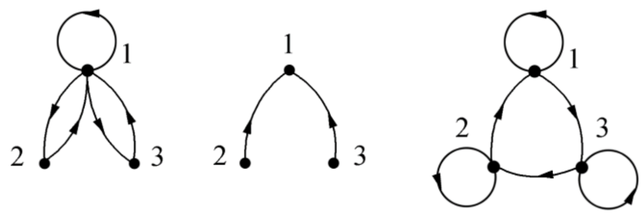
②看自环：判断自反性（每个顶点都有自环）或反自反性（每个顶点都无自环）。

③看边的方向：不同两点间有边必双向，则对称；无双向边，则反对称。

④看路径：若存在 x→y、y→z 的路径，必有 x→z 的直接边，则关系具有传递性。

综合结论：根据上述观察，给出关系满足各性质的最终判断。

例 5.13：确定图中关系的性质并解释推理过程。



(a)　　(b)　　(c)

(a) 图分析：不自反，不反自反，对称, 不反对称，不传递。

自反性：顶点 1 有自环，但顶点 2、3 没有自环，不满足 “所有顶点都有自环”，因此不自反。

反自反性：顶点 1 有自环，因此不反自反。

对称性：顶点 1 与 2、1 与 3 之间都存在双向边，顶点 2、3 之间无边，因此对称。

反对称性：存在 1↔2、1↔3 这样的双向边，且 1≠2,1≠3，因此不反对称。

传递性：存在 2→1 和 1→3，但没有 2→3；存在 3→1 和 1→2，但没有 3→2，因此不传递。

(b) 图分析：不自反，反自反，不是对称的，反对称，是传递的。

自反性：所有顶点都没有自环，因此不自反。

反自反性：所有顶点都没有自环，因此反自反。

对称性：存在 2→1，但不存在 1→2；存在 3→1，但不存在 1→3，因此不对称。

反对称性：任意两个不同顶点之间都只有单向边，不存在双向往返边，因此反对称。

传递性：图(b)只有 2→1 和 3→1 两条边，不存在任何形如 $x\to y, y\to z$ 的路径，也就是说，传递性定义中的前提条件 “若 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,z\rangle\in R$” 永远为假，根据蕴含式定义，传递性结论都为真（空真）。

(c) 图分析：自反，不反自反，不是对称，反对称，不传递。

自反性：顶点 1、2、3 都有自环，因此自反。

反自反性：顶点 1、2、3 都有自环，因此不反自反。

对称性：存在 2→1 但不存在 1→2；存在 1→3 但不存在 3→1；存在 3→2 但不存在 2→3，因此不对称。

反对称性：任意两个不同顶点之间都只有单向边，不存在双向往返边，因此反对称。

传递性：存在 2→1 和 1→3，无 2→3；存在 1→3 和 3→2，无 1→2；存在 3→2 和 2→1，无 3→1，因此不传递。

3）布尔矩阵判定法

关系的布尔矩阵判定法，是通过关系的布尔矩阵中元素的分布规律，直接判断关系是否具有自反、反自反、对称、反对称、传递这五种性质，直观、规范、便于计算。

自反性：主对角线上元素全为 1。

反自反性：主对角线上元素全为 0。

对称性：矩阵关于主对角线对称，即转置矩阵与原矩阵相等。

反对称性：对任意不同行、列，若某位置为 1，则对称位置必为 0。

传递性：布尔平方矩阵中所有为 1 的位置，在原矩阵中也为 1。

5.3.2 关系闭包

现实中的关系 R 大多 不完美，其性质往往不自反、不对称、不传递。有时我们需要以最小代价做最小修补，把关系变成我们想要的良好性质，以便进一步推理、分类和计算。闭包就是只加最少的有序对，让关系具备自反（或对称、或传递）性质，同时不破坏原有结构。自反闭包 $r(R)$就是给关系补上自己到自己，用于等价、偏序预处理；对称闭包 $s(R)$把单向边变双向，用于无向图、互相关联；传递闭包 $t(R)$补上所有间接可达，用于可达性、路径、连通性。

1）关系闭包公理化定义

定义 5.18：关系闭包定义

设 R 是非空集合 A 上的关系, R 的自反 (对称或传递) 闭包是 A 上的关系 R' , 使得 R'满足以下条件：

(1) R'是自反的（对称的或传递的）

(2) $R\subseteq R'$

(3) 对 A 上任何包含 R 的自反（对称或传递）关系 R''有 $R' \subseteq R''$。

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$, 对称闭包记作 $s(R)$, 传递闭包记作 $t(R)$。

该公理对关系 R 提了 3 点改造要求，一是修好 R，使其变成具备自反 (对称或传递)这种“好性质” 的关系 R'。二是要求不丢原来 R 里的所有关系，全都要保留在 R'里。三是在所有能满足前两条的关系 R''里，R'是最小、最简单的那个，也就是在 R 中增加的有序对最少、没有增加任何多余内容。按照上述 3 点要求改造 R，就可以得到具备自反 (对称或传递)关系的 $r(R)$, $s(R)$和 $t(R)$闭包。

2）关系闭包构造方法

设 R 为非空集合 A 上的二元关系，I_A 为 A 上的恒等关系，R^{-1} 为 R 的逆关系。

（1）自反闭包 $r(R)$ 的构造：在 R 中添加所有形如 (a,a) 的有序对，使关系成为自反，且保持最小扩充，可表示为 $R'=R\cup\{(a,a)\mid a\in A\}$。

（2）对称闭包 $s(R)$ 的构造：对 R 中每一个 (a,b)，添加逆序对 (b,a)，使关系成为对称，且保持最小扩充，可表示为 $R'=R\cup\{(b,a)\mid(a,b)\in R\}$。

（3）传递闭包 $t(R)$ 的构造：在 R 中添加所有由间接可达导出的直接有序对，即对于集合 A 中的每一对元素 a、c，如果存在一个或多个元素 b_1、b_2、…、b_n，使得(a,b_1)、(b_1,b_2)、…、(b_n,c)都属于 R，就将 (a,c) 加入 R'，使关系成为传递，且保持最小扩充。

通俗的理解是，$r(R)$是在关系 R 中，对每个元素都加上自环(x,x)后得到的自反关系；$s(R)$是在关系 R 中，对每个有序对(x,y)都加上反向有序对(y,x)后得到的对称关系；$t(R)$是在关系 R 中，把所有能间接连通的有序对(x,z)都补充进去后得到的传递关系。

3）关系的闭包定理

关系闭包公理规定了关系闭包性质，关系闭包构造方法根据定义解释了如何通过增加必要的有序对构造三种闭包，关系的闭包定理是对关系闭包构造的规范化与统一化，用严格的关系运算给出了三种闭包的统一构造形式。

定理 5.7：关系的闭包定理

设 R 是集合 A 上的一个关系，则有：

（1）$r(R) = R\cup R^0$

（2）$s(R) = R\cup R^{-1}$

（3）$t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

证明：设 R 为集合 A 上的关系，$R^0=I_A$ 为恒等关系，R^{-1} 为逆关系。

（1）$r(R) = R\cup R^0$的证明：只需证明 $R\cup R^0$满足闭包定义即可。

$R\cup R^0$是自反关系：由于 $R\cup R^0$包含 R，且由 $I_A\subseteq R\cup R^0$，可得出 $R\cup R^0$在 A 上是自反的。

$R\cup R^0$是包含 R 的最小自反关系：需要证明不存在比 $R\cup R^0$更小的、包含 R 的自反关系。

假设 R' 是一个包含 R 且比 $R\cup R^0$更小的自反关系，$I_A\subseteq R'$，$R\subseteq R'$，因此有 $R\cup R^0= I_A\cup R\subseteq R'$，这与 R' 比 $R\cup R^0$更小的假设相矛盾。

因此 $R\cup R^0$满足闭包定义。$r(R) = R\cup R^0$ 成立。

(2) 证明 $s(R) = R\cup R^{-1}$

$s(R) = R\cup R^{-1}$对称：若 $(a,b)\in s(R) = R\cup R^{-1}$，则$(a,b)\in R$ 或$(a,b)\in R^{-1}$。

若 $(a,b)\in R$，则 $(b,a)\in R^{-1}\subseteq R\cup R^{-1}$。

若$(a,b)\in R^{-1}$，则 $(b,a)\in R\subseteq R\cup R^{-1}$。故对称。

$R\subseteq R\cup R^{-1}$：显然成立。

最小性：任何包含 R 且对称的关系必包含 R^{-1}，从而包含 $R\cup R^{-1}$。

因此 $s(R) = R\cup R^{-1}$

(3) 证明 $t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

记$R^* = \sum_{k=1}^{\infty} R^k = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

对任意的序对(a,b)和(b,c)，$(a,b)\in R^*$且$(b,c)\in R^*$，则存在正整数 m,n 使得$(a,b)\in R^m$, $(b,c)\in R^m$，于是$(a,c)\in R^m\circ R^m = R^{m+n}\subseteq R^*$，故 R^*传递。

因此，由 R^* 的传递性及 $t(R)$是包含 R 的最小传递关系，我们有 $t(R)\subseteq R^*$成立。

接下来用归纳法证明 $R^n\subseteq t(R)$：

当 n=1 时，$R^1=R\subseteq t(R)$， 该命题显然成立。

假设当 $n=k$ 时命题成立（即 $R^k\subseteq t(R)$）。对于任意的 (a,b)，我们有

$(a,b)\in R^{k+1}\Rightarrow(a,b)\in R^k\circ R\Rightarrow\exists c\ (<a,c>\in R^k$且 $<c,b>\in$ R）

$\Rightarrow\exists c(<a,c>\in t(R)$ 且 $<c,b>\in t(R)$）$\Rightarrow<a,b>\in t(R)$（$t(R)$具有传递性）

故 $R^{k+1}\subseteq t(R)$，由归纳法，对任意正整数 n，$R^n\subseteq t(R)$，因此 $R^*\subseteq t(R)$。

综上，$t(R)$=R*，即 $t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$成立。

证毕。

4）传递闭包的有限化计算与闭包的不动点性质

由关系幂的最终周期性定理可知，有限集合上的任何关系 R，其幂序列 必具有最终周期性，即从某一项开始，关系幂会重复或保持不变，不会无限产生新的有序对。有 n 个元素的限集 A，其关系幂在幂次达到 n 之后，不会再产生新的可达有序对，更高次幂的结果都包含在 $R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$ 之中。因此，传递闭包原本的无限并运算 $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$ 可以借助关系幂的最终周期性简化为有限并运算：$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\cup R^n$。

若关系 R 本身已经具有自反性 / 对称性 / 传递性，则对其求对应闭包时，闭包结果就是 R 自身，即：

若 R 自反，则 $r(R)=R$

若 R 对称，则 $s(R)=R$

若 R 传递，则 $t(R)=R$

这一性质称为闭包的不动点性质。它严格体现闭包 “最小修补、不冗余扩充” 的本质，并简化闭包计算与性质判定。

5）关系闭包的矩阵表示与计算方法

闭包的矩阵表示，可将关系闭包的集合运算转化为对应的矩阵加法、复合、转置等具体运算，实现闭包的手工计算和程序实现。

设关系 R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为 M, M_r, M_s 和 M_t, 则有：

$M_r=M+E$

$M_s=M+M^T$

$M_t=M+M^2+M^3+\ldots$

其中 E 是和 M 同阶的单位矩阵, M^T 是 M 的转置矩阵。

注：上述等式的矩阵的元素相加时使用逻辑加。

6）关系图表示关系闭包

关系闭包的集合表示是其定义与理论基础，矩阵表示提供了计算方法，关系图表示实现直观理解，三中表示方式等价、相互对应，共同构成关系闭包的完整表示体系。

关系图将关系闭包抽象的关系变成看得见的点和边，只需在原图上补环、补反向边、补可达边，就能直接画出闭包。自反、对称、传递性质在图中直接展现，并能清晰地展示闭包的含义与构造过程。

闭包在关系图上的构造步骤：

设关系 R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为 G, Gr, Gs, Gt , 则 Gr, Gs, Gt 的顶点集与 G 的顶点集相等。除了 G 的边以外, 以下述方法添加新的边：

考察 G 的每个顶点, 如果没有环就加上一个环，最终得到的是 Gr。

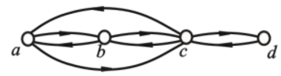
考察 G 的每一条边, 如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i\neq j$, 则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边，最终得到 Gs.

考察 G 的每个顶点 x_i, 找出从 x_i 出发的每一条路径，如果从 x_i 到路径中的任何结点 x_j 没有直接边，就加上这条边，当检查完所有的顶点后就得到图 Gt。

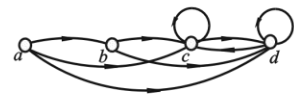
例 5.14： 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>,<c,d>,<d,c>\}$,$R$ 和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下所示：

R

$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

7）传递闭包矩阵求解-Warshall 算法

Warshall 算法的目标是用 O(n^3) 时间，从关系矩阵高效算出传递闭包矩阵。

Warshall 算法主要步骤：

①设关系 R 的关系矩阵为 M_0，顶点个数为 n。

②对 k=1,2,…,n，依次构造矩阵 M_k：

$M_k[i,j]$=1 表示存在从 x_i 到 x_j 的路径，中间只允许经过前 k 个顶点 $x_1,\ldots,x_k$。

构造规则：$M_k[i,j]= M_{k-1}[i,j]\vee(M_{k-1}[i,k]\wedge M_{k-1}[k,j])$，即：原来就可达，或者经过第 k 个点中转后可达。

③当 k=n 时，得到的矩阵 M_n 就是传递闭包矩阵。

Warshall 算法的 C 语言程序代码可通过本章扩展提示词从 AI 大模型获得。

5.4 等价关系与偏序关系

在只有元素、没结构的普通集合上加上关系或运算，就形成了有结构、能分类、能排序、能计算的结构化集合。等价关系与偏序关系就是具有特殊性质的二元关系，是用来给集合分类和排序核心工具。

5.4.1 等价关系

等价关系能把集合中的元素按照相同、相等 、同类等标准分成几堆（分类），每一堆叫一个等价类。

定义 5.19：设 R 为非空集合上的关系，如果 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的等价关系。若 R 是一个等价关系, 若$<x,y>\in R$, 称 x 等价于 y, 记做 $x\sim y$.

例 5.15：设 A={1, 2, …, 8}, 有 A 上的关系 $R=\{<x,y>|\ x,y\in A\wedge x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ 3)\}$，其中 $x\equiv y$ (mod 3) 叫做 x 与 y 模 3 相等, 即 x 除以 3 的余数与 y 除以 3 的余数相等，验证 R 是 A 上的等价关系，并画出其等价关系图。

证：只需验证 R 满足自反、对称、传递性质：

①自反性：$\forall x\in A$，有 $x\equiv x(\mathrm{mod}\ 3)\Rightarrow\langle x,x\rangle\in R$。所以 R 自反。

②对称性：若 $\langle x,y\rangle\in R$，则 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$，即 $3|x-y)\Rightarrow 3|y-x\Rightarrow y\equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$, 故 $\langle y,x\rangle\in R$，所以 R 对称。

③传递性：若$\langle x,y\rangle\in R$, $\langle y,z\rangle\in R$，则 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3), y\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$，于是 $3|x-y, 3|y-z\Rightarrow 3|(x-y)+(y-z)=x-z$，即 $x\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$，故 $\langle x,z\rangle\in R$，所以 R 传递。

结论： R 满足自反、对称、传递，所以 R 是 A 上的等价关系。

关系图与等价关系图

所有二元关系 R 都能画出关系图，但等价关系满足自反、对称和传递性质，其的关系图有三个特点：①每个点一定有自环（自反性）；②只要有 $x\rightarrow y$，就一定有 $y\rightarrow x$，可画无向边（对称性）；③整个图分成若干互不连通的"团"，团里任意两个不同点之间都互相连边（传递性）。

例 5.16：画出例 5.15 **中** R 的关系图

解：

①根据 R 定义，按余数将 A 中元素分组：

余 0：3, 6

余 1：1, 4, 7

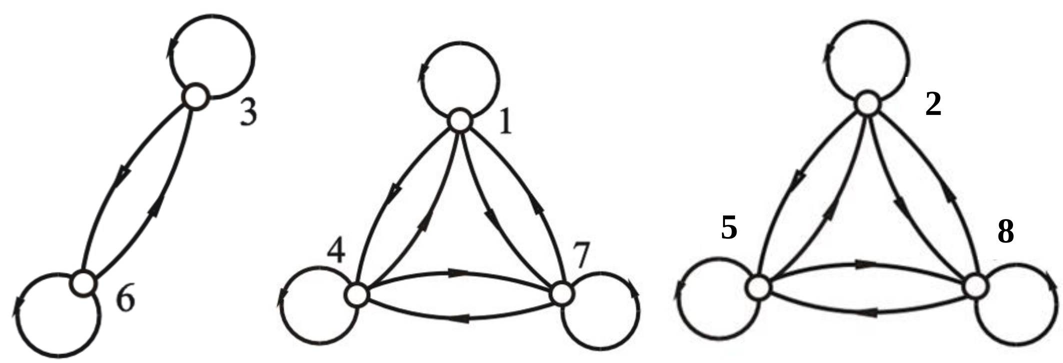
余 2：2, 5, 8

②同余组内任意两个元素都是 R 的有序对

余 0 类：$\langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle$

余 1 类：$\langle 1,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 7,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,7\rangle$

余 2 类：$\langle 2,2\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 8,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle 8,5\rangle, \langle 8,8\rangle$



5.4.2 等价类与商集

等价关系确立了集合划分的规则，定义了元素之间本质相同的标准。等价类是依据该规则得到的分类结果，商集是以所有等价类为元素的新集合。该套机制可对复杂集合（系统）进行简化、抽象元素共性、降维处理，并构建出新的数学结构-商集。

定义 5.20：等价类

设 R 是定义在非空集合 A 上的等价关系，对于任意 $x\in A$，定义$[x]_R = \{ y| y\in A \wedge xRy \}$。将 $[x]_R$ 称为 x 在 R 下的等价类，简称为 x 的等价类，记为$[x]$。

$[x]_R$ 是集合 A 中在关系 R 下与 x 等价的所有元素组成的集合，定义$[x]_R = \{ y| y\in A \wedge xRy \}$ 与$[x]_R = \{ y\in A \mid (x,y)\in R \}$ 两种写法完全等价。

1）等价类的求解方法

求等价类是依据集合上的等价关系，将集合中彼此等价的元素划归为同一子集的过程。常用求解方法包括定义法、特征分类法、同余分类法、关系图法和关系矩阵法。定义法直接按等价类定义找出所有与代表元等价的元素；特征分类法与同余分类法适用于具有相同属性或满足

模运算关系的情形；关系图法和关系矩阵法则借助图的连通分支或矩阵中对应位置快速划分等价类。各类方法均以等价关系的自反性、对称性、传递性为依据，最终得到的等价类两两互不相交，且其并集等于原集合，构成集合的一个划分。

2）求等价类的主要步骤（定义法）

设 R 是集合 A 上的等价关系。

①明确等价关系 $x \sim y$：给出元素等价的充要条件，确定判定规则。例如，模 3 等价关系 $x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 3$。

②选取代表元：从 A 中依次选取尚未被分类的元素作为代表元 a。例如，在 $A=\{1,2,\ldots,8\}$ 中依次取 1,2,3 为代表元。

③求解等价类：按等价关系找出所有与代表元等价的元素，构成等价类，即$[a]=\{x \in A \mid a \sim x\}$，例如，$[1]=\{1,4,7\}$。

④去重合并：同一等价类只保留一个，合并重复表示的等价类。可用任意元素作为代表元。例如，$[1]=[4]=[7]$，只保留 $[1]$ 即可。

⑤列出全部等价类：写出所有互不相同的等价类。例如，$[1],[2],[3]$。

⑥验证划分：检验等价类两两不交，并且所有等价类的并集等于集合 A。

按照上述步骤求得的等价类构成了 A 的一个划分。

例如，在例 5.15 中，集合 $A=\{1, 2, \ldots , 8\}$ 上模 3 等价关系的等价类为：

$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$

$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$

$[3]=[6]=\{3,6\}$

这三个分别具有余数 1、2 和 0 的等价类是不相交的，且它们的并集是 A。

定理 5.8：等价类的划分定理

设 R 是定义在非空集合 A 上的一个等价关系，则有以下结论成立：

（1）对于任意 $x \in A$，$[x]$ 是 A 的非空子集。

（2）对于任意 x，$y \in A$，若 xRy，则 $[x]=[y]$。

（3）对于任意 x，$y \in A$，若 x 与 y 不满足关系 R，则 $[x]$ 与 $[y]$ 不相交。

（4）所有等价类的并集等于 A，即$\bigcup_{x \in A}[x] = A$。

证:

(1)对任意 $x \in A$，$[x]$ 是 A 的非空子集

由等价类的定义，$[x]=\{z \in A \mid xRz\}$，其元素均来自集合 A，因此 $[x] \subseteq A$。

由于 R 是等价关系，满足自反性，即对任意 $x \in A$，有 xRx。根据等价类定义，$x \in [x]$，因此 $[x]$ 非空。

(2)若 xRy，则 $[x]=[y]$

要证明两个集合相等，需证明它们互相包含。

任取 $z \in [x]$，由等价类定义知 xRz。已知 xRy，由等价关系的对称性得 yRx。再由传递性可推出 yRz。因此 $z \in [y]$，故 $[x] \subseteq [y]$。

任取 $z \in [y]$，由等价类定义知 yRz。已知 xRy，由传递性可推出 xRz。因此 $z \in [x]$，故 $[y] \subseteq [x]$。综上，$[x]=[y]$。

(3)若 x 与 y 不满足关系 R，则 $[x] \cap [y]=\varnothing$

采用反证法。假设$[x]\cap[y]\neq\varnothing$，则存在元素 z 使得 $z\in[x]$ 且 $z\in[y]$。

由 $z\in[x]$ 得 xRz，由 $z\in[y]$ 得 yRz。

由对称性，从 yRz 得 zRy。由传递性可推出 xRy。这与已知条件 “x 与 y 不满足关系 R” 矛盾。因此假设不成立，$[x]$ 与 $[y]$ 不相交。

(4) $\bigcup_{x\in A}[x]=A$

要证明两个集合相等，需证明它们互相包含。

对任意 $x\in A$，由 (1) 知 $[x]\subseteq A$。若干个 A 的子集的并集仍然是 A 的子集，因此$\bigcup_{x\in A}[x]\subseteq A$。

任取 $a\in A$。由自反性，aRa，故 $a\in[a]$。而 $[a]$ 是并集中的一个集合，因此 $[a]\in\bigcup_{x\in A}[x]$。故$A\subseteq\bigcup_{x\in A}[x]$ 。

综上，$\bigcup_{x\in A}[x]=A$。

结论：由 (1)(3)(4) 可知，等价关系 R 的所有等价类构成了集合 A 的一个划分。

3）商集 A/R

商集是用等价类作为元素的新集合，是对原集合的抽象与压缩。商集忽略元素间的非本质差异，聚焦于它们在等价关系下的共同特征。在保持关键结构不变的前提下，用更简洁的对象来研究原集合的性质，降低问题复杂度。

定义 5.21：设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集, 记做 A/R, $A/R=\{\,[x]_R\mid x\in A\,\}$。

例如：设 $A=\{1, 2, \cdots, 8\}$

A 关于模 3 等价关系 R 的商集为：$A/R=\{\,\{1, 4,7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\,\}$

A 关于恒等关系的商集为：$A/I_A=\{\,\{1\},\{2\}, \ldots ,\{8\}\}$

A 关于全域关系的商集为：$A/E_A=\{\,\{1, 2, \ldots ,8\}\,\}$

把集合 A 看作一堆彩色球，等价关系 R 是 “颜色相同” 的规则，那么商集 A/R 中的元素就是按颜色分好的每一堆彩球，每一堆就是一个等价类。商集是利用等价关系对集合进行抽象与分类得到的新数学结构，是代数学、数论、拓扑学等领域构造新结构的基础工具。

5.4.3 集合的划分

集合划分是将非空集合不重不漏地分解为若干非空子集的过程，这些子集两两不交且并集为原集合，是对集合进行结构化分类的核心方式。求等价类的方法与集合划分的方法互为依存、相辅相成。求等价类是从等价关系出发，按规则将集合元素归类，得到的每一个等价类就是集合划分中的一个基本分块。反过来，对集合划分出的每一个分块又可看作是等价类，进而唯一确定一个等价关系。前者是自下而上的元素归类，后者是自上而下的整体分块，二者以等价类为桥梁，共同完成集合的分类与结构构造。

集合划分的本质是将集合不重不漏地分成若干非空子集，常见的集合划分方法包括按等价关系求等价类、按元素特征分组、按结构分块、直接指定分块等。无论采用哪种方法，最终得到的、满足等价类的划分定理的分块集合，就是该集合的一个划分 π。

定义 5.22：集合的划分

设 A 是一个非空集合， π 是 A 的子集族（ $\pi\subseteq\mathcal{P}(A)$），如果它满足以下条件：

(1) $\varnothing\notin\pi$

(2) $\forall x\forall y\ (x,y\in\pi\wedge x\neq y\rightarrow x\cap y=\varnothing)$

(3) $\cup\pi=A$

则称π是 A 的一个划分, 称π中的元素为 A 的划分块。

上述定义从集合族的结构、块的非空性、块间不交性、整体覆盖性四个方面，严格、形式化地规定了什么是集合的划分，强调划分必须满足无空块、不重叠、全覆盖三个本质特征。

例 5.17：设 $A=\{a, b, c, d\}$**,**判断下列子集族哪些是 A 的划分：

$\pi_1=\{\{a,b,c\},\{d\}\}$,

$\pi_2=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$,

$\pi_3=\{\{a\},\{a,b,c,d\}\}$,

$\pi_4=\{\{a,b\},\{c\}\}$,

$\pi_5=\{\varnothing,\{a,b\},\{c,d\}\}$,

$\pi_6=\{\{a,\{a\}\},\{b,c,d\}\}$.

解：

π_1、π_2：所有块非空、两两不交、并集等于 A，是 A 的划分。

π_3： $\{a\}$ 与 $\{a,b,c,d\}$ 相交，不是 A 的划分。

π_4：所有块的并集缺少元素 d，不是 A 的划分。

π_5：子集中含有空集 $\varnothing$，不是 A 的划分。

π_6：因中$\{a\}\notin A$，$\{a,\{a\}\}$ 不是 A 的子集族，不是 A 的划分。

结论：π_1、π_2是 A 的划分，π_3、π_4、π_5、π_6不是 A 的划分。

等价关系与集合划分的对应关系：

等价关系确定划分（商集），划分导出等价关系，二者一一对应、互逆确定。

定理 5.9：等价关系与集合划分的一一对应定理

设 A 为非空集合，则：

（1）若 R 是 A 上的等价关系，则商集 A/R 是 A 的一个划分。

（2）若 π 是 A 上的一个划分，根据 π 定义关系 R:

$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A$ 且 x,y 属于 π 中的同一个划分块$\}$

则 R 是 A 上的等价关系，且由 R 确定的商集 A/R 恰好就是 π。

因此，集合 A 上的所有等价关系与 A 的所有划分之间存在一一对应。

π要成为 A 的一个划分，必须满足集合划分定义（定义 5.21）中的 3 条要求：即 π中不含空集、任意两个不同块互不相交、所有块的并等于 A。也就是说 π是 A 的子集族，即 $\pi\subseteq\mathcal{P}(A)$。

例 5.18：设 $A=\{a, b, c\}$，求 A 上所有等价关系。

解：由等价关系与划分一一对应定理，先求所有划分，再写对应关系。

$\pi_1=\{\{a,b,c\}\}$，$R_1=A\times A$

$\pi_2=\{\{a\},\{b,c\}\}$，$R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$

$\pi_3=\{\{b\},\{a,c\}\}$，$R_3=\{\langle b,b\rangle,\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$

$\pi_4=\{\{c\},\{a,b\}\}$，$R_4=\{\langle c,c\rangle,\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$

$\pi_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$，$R_5=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$

共得到 5 个等价关系。

对于集合 $A=\{a, b, c\}$，先将 A 按照要划分的块数 k（k=1,2,3）划分，然后累计每个块数 k 各自划分的具体数目，就得到了 A 的划分总数，也就是 A 等价关系的数量。

上例中，将 A 分成 1 块 的分法有 π_1；分成 2 块 的分法有 π_2、π_3、π_4；分成 3 块 的分法有 π_5。即 3 元集合 A 共有 5 种划分，每种划分对应唯一的等价关系。

求 n 元集合的划分个数，可先按划分的块数 k（k=1,2,…,n）分类计数，再将各类结果求和。其中将 n 个元素恰好分成 k 个非空不交子集的方法数由第二类斯特林数 $S(n,k)$ 给出，而所有划分方式的总数即为贝尔数 B_n，满足$B_n \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$。具体计算方法可参照本章扩展阅读提示词求助 AI 大模型。

5.4.4 偏序关系

等价关系与偏序关系是集合上两类核心的二元关系，二者均满足自反性和传递性，主要区别是等价关系具有对称性、而偏序关系具有反对称性。主要用于对集合中的元素进行分类，刻画元素间的等价与平等关系。而偏序关系具有反对称性，用于刻画元素间先后、大小、包含、层次等次序结构，因此也被称为偏序。其主要作用是在集合上建立序结构，描述元素之间的优先、优劣、依赖与包含关系，为研究排序、最优、上下界以及格等有序结构提供基础。

定义 5.23：偏序关系

在非空集合上的一种关系，如果它是自反的、反对称的和传递的，那么就被称为集合 A 上的偏序关系，记为$\preccurlyeq$。如果 $<x, y> \in \preccurlyeq$，那么我们将其写作 $x \preccurlyeq y$，读作 x "小于或等于" y。

1）几种典型的偏序关系

（1）数的小于等于关系 ≤：实数集 $\mathbb{R}$、整数集 $\mathbb{Z}$ 上的关系 ≤，满足自反、反对称、传递，是经典的偏序关系。记为：$\langle \mathbb{R},\leq\rangle$，$\langle \mathbb{Z},\leq\rangle$。

（2）集合的包含关系 ⊆：幂集 $\mathcal{P}(A)$ 上的关系 ⊆，满足自反、反对称、传递，是偏序关系。记为：$\langle \mathcal{P}(A),\subseteq\rangle$。

（3）正整数的整除关系 |：正整数集 $\mathbb{Z}^+$ 上的关系 |，满足自反、反对称、传递，是偏序关系。记为：$\langle \mathbb{Z}^+, \mid \rangle$。

（4）集合上的恒等关系 I_A：集合 A 上的恒等关系 I_A，满足自反、反对称、传递，是平凡的偏序关系。记为：$\langle A, I_A\rangle$。平凡的偏序关系$\langle A, I_A\rangle$元素之间只与自身有偏序关系，是一种特殊偏序关系。

2）偏序集中元素之间的有序特性

偏序集中元素之间的可比性、全序和覆盖关系是描述偏序集有序结构的重要概念。可比性用于判断两个元素之间是否存在偏序关系，即是否可以比较先后或大小。若偏序集中任意两个元素都可比，则该偏序称为全序，是一种完全有序的特殊偏序。覆盖关系则表示元素间不存在其他中间元素的直接偏序关系，用于体现元素之间的直接相邻次序。三者共同刻画了偏序集中元素的有序程度与层次关系。

定义 5.24：偏序集中的可比与不可比元素

设 (A,≤) 是偏序集。

（1）可比（Comparable）：设 $x,y\in A$，若 $x\leq y$ 或 $y\leq x$，则称 x 与 y 可比。

（2）不可比（Incomparable）：设 $x,y\in A$，若 $x\nleq y$ 且 $y\nleq x$，则称 x 与 y 不可比。

定义 5.25： 全序关系（全序）

设 R 是非空集合 A 上的偏序关系。若对任意 $x,y\in A$，x 与 y 均可比，则称 R 为集合 A 上的全序关系，简称全序。

3）典型的全序关系

（1）整数全序 $(\mathbb{Z},\leqslant)$：任意两元素可比，为全序。

（2）实数全序 $(\mathbb{R},\leqslant)$：任意两元素可比，为全序。

（3）有理数全序 $(\mathbb{Q},\leq)$：任意两元素可比，为全序。

（4）有限全序集 $(A,\leq)$：A 为有限非空集合，任意两元素都可比，为全序。

（5）单元集全序 $(\{a\},\leq)$：仅有一个元素，任意两元素（平凡）可比，为全序。

定义 5.26： 覆盖关系（覆盖）

设 $(A,\leq)$ 为偏序集，$x,y\in$A。若 $x<y$（即 x≤y 且 x≠y），且不存在 $z\in A$，使得 $x<z<y$，

则称 y 覆盖 x（或称 x 被 y 覆盖）。

在偏序集中，可比与不可比用于描述任意两个元素之间是否存在偏序关系，若偏序集中任意一对元素都可比，则该偏序为全序关系。而覆盖关系是可比元素间的一种特殊紧邻关系，指两元素可比且中间不存在其他元素。三者层层递进，共同刻画了偏序集的序结构特征。

典型的覆盖关系

（1）整数全序 $(\mathbb{Z},\leqslant)$：$\forall n\in\mathbb{Z}$，$n+1$ 覆盖 n。

（2）正整数整除偏序 $(\mathbb{Z}^{+},|)$：y 覆盖 $x\Leftrightarrow x\mid y$ 且 $\frac{y}{x}$ 为素数。

（3）幂集包含偏序 $(\mathcal{P}(A),\subseteq)$：对任意 $S,T\in\mathcal{P}(A)$，有 T 覆盖 $S\Leftrightarrow S\subset T$ 且 $|T|-|S|=1$。

覆盖是包含的一种特殊情形。若 T 覆盖 S，则一定有 $S\subset T$（真包含），且 S 与 T 之间不存在其他子集，也就是满足 |T|−|S|=1。

例 5.19： 分析集合 A 上整除偏序的可比、全序与覆盖。

解：

设集合 $A=\{1,2,4,6\}$，考虑整除偏序 $(A,|)$，其中 $x\mid y$ 表示 x 整除 y。

（1）可比与不可比：

可比元素对：(1,2),(1,4),(1,6),(2,4),(2,6)

不可比元素对：(4,6)

（2）全序判断：由于 4 与 6 不可比，因此该偏序不是全序。

（3）覆盖关系：2 覆盖 1，4 覆盖 2，6 覆盖 2。

结论： 偏序$(A,|)$中存在不可比元素对，故不是全序；覆盖关系仅出现在可比且无中间元素的元素对之间。(1,4), (1,6)可比，但中间存在元素 2，满足 1|2|4（6）， 所以不是覆盖。

5.4.5 偏序关系的图形化表示-Hasse 图

偏序关系的图形化表示主要有关系图与哈塞图两种，哈塞图是偏序集的简化表示，仅保留覆盖关系，省略自环、传递边与箭头，简洁直观，是描述偏序结构最常用的标准方法。将抽象

的集合元素与偏序关系转化为直观图形，看清晰展示元素间的次序、可比、覆盖、层次与整体结构，便于观察、分析与判断偏序集性质（如全序、极值元、链、反链等），简化推理与理解。

定义 5.27：偏序集

非空集合 A 与定义在 A 上的偏序关系 $\preceq$ 组成的整体称为偏序集，记作 $(A,\preceq)$。

常见偏序集有：整数集上的小于等于 $(\mathbb{Z},\leqslant)$，正整数集上的整除 $(\mathbb{Z}^+,|)$，集合幂集上的包含 $(\mathcal{P}(A),\subseteq)$等。

定义 5.28：哈斯图

设 $(A,\preceq)$ 是一个偏序集。哈斯图是表示该偏序集的一种简化有向图，其构造规则为：

①用顶点表示集合 A 中的元素。

②若 $x{<}y$ 且 y 覆盖 x，则在 x 与 y 之间画一条无向边，两个连通结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前。

③省略所有自环（自反性）。

④省略所有由传递性可推出的边。

⑤所有边默认方向向上，因此不画箭头。

哈斯图是一种特殊类型的偏序集关系图，其中传递边被移除，且方向是隐含的。

例 5.20：画出如下偏序集的哈斯图

正整数整除偏序集：$(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},|)$

幂集包含偏序集：$(\mathcal{P}(\{a,b,c\}),\subseteq)$

解:

1)偏序集 $(\{1,2,\ldots,9\},|)$ 哈塞图绘制

①确定顶点顶点：1,2,3,4,5,6,7,8,9。

②列出覆盖关系:

2 覆盖 1，3 覆盖 1，5 覆盖 1，7 覆盖 1

4 覆盖 2，6 覆盖 2，6 覆盖 3

8 覆盖 4，9 覆盖 3

③分层（由下往上）

第 1 层：节点 1 为最底层元素。

第 2 层：2,3,5,7，仅覆盖第 1 层元素 1，放在第 1 层上方。

第 3 层：4,6,9，仅覆盖第 2 层中的对应元素 2,3，放在第 2 层上方。

第 4 层：8，仅覆盖第 3 层中的元素 4，放在第 3 层上方。

2) 偏序集 $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}),\subseteq)$ 哈塞图绘制

①确定顶点：$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$

②列出覆盖关系：

$\{a\},\{b\},\{c\}$ 都覆盖 $\varnothing$

$\{a,b\}$ 覆盖 $\{a\}$, $\{b\}$

$\{a,c\}$ 覆盖 $\{a\}$, $\{c\}$

$\{b,c\}$ 覆盖 $\{b\}$, $\{c\}$

$\{a,b,c\}$覆盖$\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$

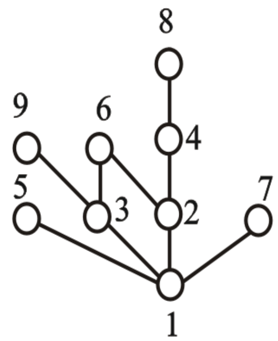
2) 分层（由下往上）

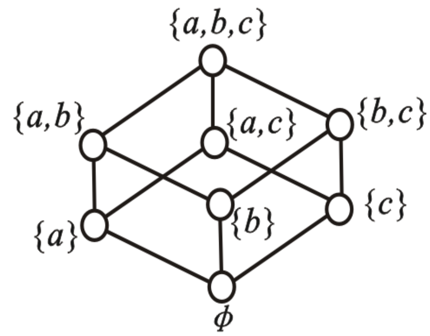
第 1 层：空集 ∅，为最底层元素。

第 2 层：{a},{b},{c}，仅覆盖第 1 层元素 ∅，放在第 1 层上方。

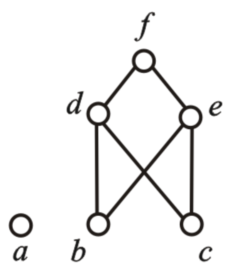
第 3 层：{a,b},{a,c},{b,c}，仅覆盖第 2 层中的对应元素 {a},{b},{c}，放在第 2 层上方。

第 4 层：{a,b,c}，仅覆盖第 3 层中的元素 {a,b}, {a,c}, {b,c}，放在第 3 层上方。





例 5.21：已知偏序集<A,R>的哈斯图如下图所示,试求出集合 A 和关系 R 的表达式。



解：

① 集合 A 由哈斯图中所有顶点构成：A={a,b,c,d,e,f}

② 列出覆盖关系（哈斯图直接连线）

根据 “上层元素覆盖下层元素” 的原则，从图中提取所有直接覆盖关系：

d 覆盖 b, d 覆盖 c, e 覆盖 c, e 覆盖 b, f 覆盖 d, f 覆盖 e

③构造偏序关系 R,

偏序关系 R 必须满足自反性、反对称性和传递性，因此由三部分有序对组成：

自反性：所有 (x,x)，其中 $x\in A$, I_A={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f)}

直接覆盖对：由覆盖关系直接得到覆盖对={(b,d),(c,e),(c,d),(b,e),(d,f),(e,f)}

传递性补充：由覆盖关系通过传递性推导得到传递对

由 $b\leqslant d$ 且 $d\leqslant f$，得 $b\leqslant f$，即 (b,f)

由 $c\leqslant e$ 且 $e\leqslant f$，得 $c\leqslant f$，即 (c,f)

④将三部分合并，得到关系 R 的完整表达式：

$R=I_A\cup_{\text{覆盖对}}\cup_{\text{传递对}}$={($a$,$a$),($b$,$b$),($c$,$c$),($d$,$d$),($e$,$e$),($f$,$f$),($b$,$d$),($b$,$e$),($b$,$f$),($c$,$d$),($c$,$e$),($c$,$f$),($d$,$f$),($e$,$f$)}

最终得到偏序集<A,R>哈斯图对应的集合 A 和偏序关系 R。

5.4.6 偏序集的极值元素与界

当偏序集中存在不可比元素时，传统意义上统一的“最小、最大”概念不再普遍适用。本节介绍的 4 个极值元素用于描述集合内部元素的极值状态，4 个界元素可以刻画子集在整体偏序集中的外围约束关系，它们完整的反映了集合的极端位置、层级关系与整体边界特征。

1）偏序集上的极值元素定义

当偏序集中存在不可比元素时，传统意义上统一的“最小、最大”概念不再普遍适用，无法准确描述偏序集中元素的极端位置与整体结构特征。引入最小元和最大元，可描述与全体元素比较后的全局唯一极值。引入极小元和极大元，可得到局部无更小或更大的相对极值。

定义 5.29： 偏序集的最小元、最大元、极小元、极大元

设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$:

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立, 则称 y 为 B 的最小元。

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立, 则称 y 为 B 的最大元。

(3) 若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为 B 的极小元。

(4) 若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为 B 的极大元。

为了使极值概念可灵活作用于任意子集，上述定义主要考虑子集 B 中元素的极值。

最小元 y 必须和 B 中每一个元素 x 都比较，且满足 $y\preccurlyeq x$，它是真正小于等于所有元素的全局最小。极小元 y 只是同 B 中所有可比元素进行比较后，使得 B 中不会存在比 y 更小的元素，不再考虑 y 不可比的元素。

最大元 y 必须和 B 中每一个元素 x 都比较，且满足 $x\preccurlyeq y$，它是真正大于等于所有元素的全局最大。极大元 y 只是同 B 中所有可比元素进行比较后，使得 B 中不会存在有比 y 更大的元素，不再考虑 y 不可比的元素。

2）偏序集上的极值元素核心性质

在有限集中，极小元和极大元总是存在的，且可能不唯一。

最小元和最大元并不一定存在，但如果存在，它们一定是唯一的。

最小元一定是极小元，最大元一定是极大元。

孤立节点既是极小元也是极大元。

3）偏序集子集的上界、下界与确界

定义 5.30： 上界、下界与确界

设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in A$:

（1）若$\forall x\ (x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的上界。

（2）若$\forall x\ (x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的下界。

（3）令 $C=\{y\mid y$ 为 B 的上界$\}$, 则称 C 的最小元为 B 的最小上界 或上确界。

（4）令 $D=\{y\mid y$ 为 B 的下界$\}$, 则称 D 的最大元为 B 的最大下界 或下确界。

上述定义均以偏序集 A 的子集 B 为讨论对象。上界是在全集 A 中选取元素 y，要求 y 大于等于子集 B 中的每一个元素，为子集 B 提供上侧约束。下界是在全集 A 中选取元素 y，要求 y 小于等于子集 B 中的每一个元素，为子集 B 提供下侧约束。上确界（最小上界） 是在子集 B 的全体上界中取最小元，是对子集 B 最精确的上侧逼近。下确界（最大下界） 是在子集 B 的

全体下界中取最大元，是对子集 B 最精确的下侧逼近。这组定义始终以子集 B 为核心，在整个偏序集 A 中确定子集 B 的外部边界与最优界，实现对偏序集局部结构的准确描述。

4）偏序集子集的上界、下界与确界的特性

设 $<A,\preccurlyeq>$ 为偏序集，$B\subseteq A$，子集 B 的界与确界有如下性质：

①子集 B 的下界、上界不一定存在，存在时也不一定唯一。

②B 的所有上界中最小的那个就是 B 的上确界，B 的所有下界中最大的那个就是 B 的下确界。上/下确界下若存在必唯一。

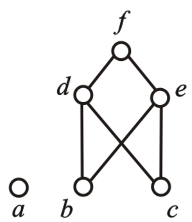
③界与确界是从全集 A 视角为子集 B 确定的边界元素，该元素不一定属于 B。

例 5.22：求上界、下界与确界

设偏序集$<A,\preccurlyeq>$如下图所示：

（1）求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元。

（2）设 $B=\{ b, c, d \}$, 求 B 的下界、上界、下确界、上确界。



解：

整个集合 A=$\{a,b,c,d,e,f\}$

偏序关系由哈斯图给出：$b<d<f$，$b<e<f$，$c<d<f$，$c<e<f$，a 与其他元素均不可比。

（1）求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元

①a,b,c 在哈斯图中无元素在其下方，没有比它们更小的可比元素，是极小元；是极小元。d,e,f 均有元素在其下方，不是极小元。结果：A 的极小元为 $\{a, b, c\}$。

②a 与 b,c,d,e,f 不可比，b 与 a,c 不可比，c 与 a,b 不可比，没有元素能小于等于全体元素。结果：A 的最小元不存在。

③f 在哈斯图中无元素位于其上方，没有比它更大的可比元素，因此是极大元；其余元素均有元素在其上方，不是极大元。结果：A 的极大元为 $\{f\}$。

④最大元要求大于等于 A 中所有元素。f 与 a 不可比，不满足定义。结果：A 的最大元不存在。

结论：A 的极小元：$\{a, b, c\}$；

A 的最小元：不存在；

A 的极大元：$\{f\}$；

A 的最大元：不存在。

（2）设 $B=\{b,c,d\}$，求 B 的下界、上界、下确界、上确界

①下界要求在 A 中找元素 y，使得对所有 $x\in B$，都有 $y\preccurlyeq x$。a 与 b,c,d 均不可比；b 与 c 不可比； d,e,f 均不满足小于等于 B 中所有元素。结果：B 的下界不存在。

②上界要求在 A 中找元素 y，使得对所有 $x\in B$，都有 $x\preccurlyeq y$。由哈斯图：$b<d<f$，$c<e<f$，只有 f 同时大于等于 b,c,d。结果：B 的上界为 $\{f\}$。

③下确界是下界集合的最大元。因为 B 没有下界，所以下确界不存在。结果：B 的下确界不存在。

④上确界是上界集合的最小元。B 的上界只有 f，其最小元就是 f。结果：B 的上确界为 f。

结论：

B 的下界：不存在；

B 的上界：$\{f\}$；

B 的下确界：不存在；

B 的上确界：f。

5）链与反链

链描述了偏序集中元素之间可以互相比较的全序子集部分，该子集有序、线性、可比较。反链描述了偏序集中任意两个不同元素都不可比较的子集部分，该部分无序、平行、不可比较。二者可帮助分析偏序集的结构复杂度，是组合分解、排序问题的基础。

定义 5.31：链与反链

设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$。

(1) 如果$\forall x,y\in B$，x 与 y 都是可比的，则称 B 是 A 中的一条链，B 中的元素个数称为链的长度。

(2) 如果$\forall x,y\in B$，$x\neq y$，x 与 y 都是不可比的，则称 B 是 A 中的一条反链，B 中的元素个数称为反链的长度。

若多个反链之间没有公共元素，则称这些反链为不相交反链。

例如，在偏序集$<\{1,2,\ldots,9\},|>$中，$\{1,2,4,8\}$是长为 4 的链，$\{1,4\}$是长为 2 的链，$\{2,3\}$是长为 2 的反链。对于单元集$\{2\}$，它的长度是 1，既是链也是反链。

在单元集中找不到一对不同元素，它们不可比，也就是找不到链定义的反例，那么链的定义命题就算成立，所以是链。同样，也找不到一对不同元素，它们可比，那么反链定义命题就算成立，所以是反链。

6）Dilworth 定理 - 链与反链的对偶关系

定理 5.10：Dilworth 定理

设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集，如果 A 中最长的链长度为 n, 则该偏序集可以分解为 n 条不相交的反链。

算法 5.1： 偏序集反链分解算法

输入：偏序集 A

输出：A 中的反链 $B_1, B_2, \ldots$

1．$i\leftarrow 1$

2．$B_i\leftarrow$当前 A 中的所有极大元的集合（B_i 是一条反链）

3．令 $A\leftarrow A-B_i$

4．if $A\neq\varnothing$

5． $i\leftarrow i+1$

6．转 2

输出反链序列 $B_1, B_2, \ldots$

算法的实现代码可利用本章知识扩展提示词求助 AI 大模型实现。

7）拓扑排序

无论偏序集中的元素是否两两可比，拓扑排序都是对该偏序集的线性扩展；它在严格保留原有偏序关系的前提下，将偏序扩充为全序，且仅当偏序集对应的有向图无环时，拓扑排序才存在。拓扑排序主要用于计算图调度、任务依赖推理、流水线规划等场景，确定满足先后约束的线性执行顺序，核心是处理有向无环的依赖关系。

定义 5.32： 拓扑排序

设 $\preceq$ 是非空集合 A 上的偏序关系，若 A 上的一个全序关系 $\leqslant$ 满足：$\forall x,y\in \mathrm{A}, x\preceq y\Rightarrow x\leqslant y$ 则称这个全序 $\leqslant$ 为原偏序的拓扑排序（也称为线性扩展）。

在这个定义中，$\preceq$ 表示集合上原本的偏序关系，只要求部分元素之间存在先后，不要求任意两个元素都可比。而 $\leqslant$ 表示拓扑排序构造出的全序关系，要求任意两个元素都可比、能排成一条直线。条件 $x\preceq y\Rightarrow x\leqslant y$ 使得原偏序里有先后的元素对，在新的全序里必须严格保持这个先后顺序。也就是说拓扑排序是在不破坏原有偏序的前提下，将偏序兼容扩展为全序。

拓扑排序主要有极小元法和深度优先搜索（DFS）法，极小元法从偏序集出发，不断选取并移除当前极小元，依次得到拓扑序列。DFS 法对有向无环图进行遍历，按节点完成顺序记录后序序列，再将其逆序，即可得到合法拓扑排序，两种方法都能在保留原有偏序关系的前提下得到全序排列。

算法 5.2： 拓扑排序- 极小元法

输入：有限非空偏序集 $(A,\preceq)$

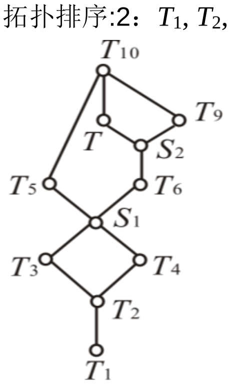
输出：该偏序集的一个拓扑排序 $a_1,a_2,\ldots,a_n$

1. $i\leftarrow 1$
2. 从 A 中选择一个极小元 a_i 作为最小元
3. $A\leftarrow A-\{a_i\}$
4. if $A\neq\varnothing$
5. 　$i\leftarrow i+1$
6. 　转 2

例 5.23： 设任务集合 $A = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, S_1, T_6, S_2, T, T_9, T_{10}\}$，$\preceq$ 是 A 上的偏序关系，其哈斯图如图所示。判断下列序列是否为该偏序集的拓扑排序。

拓扑排序 1：$T_1, T_2, T_3, T_4, S_1, T_5, T_6, S_2, T, T_9, T_{10}$

拓扑排序:2：$T_1, T_2, T_3, T_4, S_1, T_6, S_2, T, T_9, T_5, T_{10}$



解：

①从哈斯图中提取所有必须遵守的偏序关系：

$T_1 < T_2$，$T_2 < T_3$, $T_2 < T_4$，$T_3 < S_1$, $T_4 < S_1$，$S_1 < T_5$, $S_1 < T_6$，$T_5 < T_{10}$, $T_5 < T$，$T_6 < S_2$

$S_2 < \mathrm{T}$, $S_2 < T_9$，$T < T_{10}$, $T < T_9$

②检查序列 1：$T_1, T_2, T_3, T_4, S_1, T_5, T_6, S_2, T, T_9, T_{10}$

逐一验证关键约束：所有任务执行的先后次序都符合图中的偏序关系，因此序列 1 是有效的拓扑排序。

③检查序列 2：$T_1, T_2, T_3, T_4, S_1, T_6, S_2, T, T_9, T_5, T_{10}$

关键矛盾：逐一验证关键约束：所有任务执行的先后次序都符合图中的偏序关系，因此序列 1 是有效的拓扑排序。因此序列 2 是有效的拓扑排序。

知识扩展提示词

1. 有序对的集合定义形式是如何用集合的确定性，严格定义有序对的顺序性？
2. 幂序列的有限性规范证明步骤是什么？
3. 设计 Warshall 算法的 C 语言程序代码，以"Warshall 算法程序.c"文件名输出，在注释中给出运行测试数据。
4. 如何利用第二类斯特林数 $S(n,k)$和贝尔数 B_n 求 n 元集合的划分个数？

第 5 章主要数学符号列表

序号	符号	含义	示例
1	$\times$	笛卡尔积	$A\times B$, 集合 A 与 B 的笛卡尔积
2	｜ ｜	基数符号	｜A｜, 集合 A 的基数
3	·	乘号	｜A｜·｜B｜, 有限集合 A 与 B 基数乘积
4	$\not R$	不存在关系符	$a \not R b$, a 与 b 没有关系 R
5	E_A	集合 A 上的全域关系	$E_A=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$
6	I_A	集合 A 上的恒等关系	$I_A=\{\langle x,x\rangle \mid x\in \mathrm{A}\}$
7	L_A	集合 A 上的≤关系	$L_A=\{<x,y>\mid x,y\in A\wedge x\le y\}$
8	D_B	集合 A 上的整除关系	$D_B=\{< x,y >\mid x,y\in B\wedge x$ 整除 $y\}$
9	$R_\subseteq$	集合 A 上的包含关系	$R_\subseteq=\{< x,y >\mid x,y\in \mathcal{A}\wedge \mathrm{x}\subseteq \mathrm{y}\}$，$\mathcal{A}$是集合族
10	M_R	关系 R 的关系矩阵	对于矩阵元素 m_{ij}, R 中存在这个有序对就取 1, 否则取 0
11	dom$R$	关系 R 的定义域	$\mathrm{dom}R = \{x \mid \exists y\ (<x,y>\in R)\ \}$
12	ran$R$	关系 R 的值域	$\mathrm{ran}R = \{y \mid \exists x\ (<x,y>\in R)\ \}$
13	fld$R$	关系 R 的域	$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$
14	R^{-1}	关系 R 的逆关系	$R^{-1} = \{<y,x> \mid <x,y>\in R\}$
15	$\circ$	关系复合运算符	$S\circ R$, 关系 R、S 的复合关系
16	R^n	关系 R 的 n 次幂	$R^0 = \{<x,x> \mid x\in A\ \} = I_A$
17	～	一般等价关系	红苹果~红草莓, 红苹果与红草莓颜色相同，因此它们等价
18	≡	同余、恒等、强等价	$x\equiv y(\mathrm{mod}\ n)$, x 与 y 模 n 同余
19	$r(R)$	关系 R 的自反闭包	$r(R)$是在关系 R 中,对每个元素都加上自环(x,x)后得到的自反关系

20	$s(R)$	关系 R 的对称闭包	$s(R)$是在关系 R 中,对每个有序对(x,y)都加上反向有序对(y,x)后得到的对称关系
21	$t(R)$	关系 R 的传递闭包	$t(R)$是在关系 R 中,把所有能间接连通的有序对(x,z)都补充进去后得到的传递关系
22	$[x]$	x 的等价类	$[x]_R$, x 在关系 R 下的等价类
23	A/R	商集	$A/R = \{ [x]_R \mid x\in A \}$, 所有等价类构成的集合
24	π	集合 A 的划分	$\cup\pi=A$,π中的元素为 A 的划分块