# 目录

# 第 3 章 命题逻辑与命题公式

命题是具有唯一确定真值的陈述句，是命题逻辑研究的对象。命题逻辑又称命题演算，是通过联结词、推理规则分析命题之间的逻辑关系。命题公式是命题逻辑的形式化表达，由简单命题变元、联结词和括号按照一定规则组合构造。

命题逻辑是哲学思辨与数学方法结合的产物，也是数学方法与逻辑思维结合的典范。命题逻辑的研究内容都围绕将逻辑推理转化为可形式化、可演算、可判定的符号操作这一核心目标展开。该逻辑工具被广泛应用于计算机科学、人工智能、数字电路设计、软件工程、信息安全、智能决策等关键领域。

## 3.1 命题逻辑基础

本节围绕命题与命题公式的基本概念展开，命题与联结词是命题逻辑的研究对象与基本运算单元，命题公式及其语法是命题逻辑的形式化表达载体与核心构造规则。

### 3.1.1 命题与联结词

#### 1) 命题及其语义

2.1 节关于命题的语言描述是命题的 自然形态，命题逻辑中需要将自然语言命题转化为命题逻辑中由符号、联结词构成的标准表达式，是命题的逻辑形态。其核心目标是消除自然语言的歧义、模糊性，让命题的逻辑结构与关系可精准演算和判定。

**定义 3.1**：命题

命题是具有唯一确定真值的陈述句，真值仅为真（T/1）或假（F/0），是命题逻辑的基本研究单元。

上述定义中强调了两点：一是祈使句、疑问句、感叹句，真值不确定的语句，悖论句均非命题。二是命题有且仅有一个确定真值，而且只能取真（T/1）或假（F/0）值之一。

**例 3.1**：以下句子中哪些不是命题？

(1) 中华人民共和国的首都是北京.

(2) $2 + 3 ＝6$.

(3) $x + \mathrm{y} ＞ 8$.

(4) 你会打网球吗？

(5) 地球以外的星球也有生命.

(6) 今年的冬天真冷呀！

(7) 请关上门！

(8) 我正在说谎话.

解：(3)无法判定真值，(4)是疑问句，(6)是感叹句，(7)是祈使句，(8)是悖论，这些都不是命题。

#### 2）简单命题与复合命题

简单命题也称为原子命题，是命题中不可再分的最小逻辑单元，不含逻辑联结词；复合命题是由一个或多个简单命题通过逻辑联结词组合而成的命题，其真值由构成它的简单命题真值和联结词规则共同确定。

简单命题通常用大写英文字母（$P,Q,R,\ldots$ 或 $P_1, Q\,2,\ldots$）表示，称为命题变元 / 常元，是构造命题公式的基本符号；复合命题由简单命题符号与逻辑联结词（$\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$）组合表示。命题公式是二者的形式化符号表达，是将自然语言命题转化为逻辑演算的核心载体。

例如：如果明天天气好, 我们就去打球

设 $p$:明天天气好, $q$:我们去打球；该复合命题可表述为：只要 $p$, 就有 $q$

**3）逻辑联接词**

逻辑联结词是命题逻辑中联结简单命题、构建复合命题的核心符号，是对自然语言中逻辑关联词汇的形式化、规范化抽象。逻辑联结词有其严格的真值运算规则，与自然语言的语义无关。一元联结词仅能作用于 1 个命题，二元联结词作用于 2 个命题。

**定义 3.2**: 否定式与否定联结词

“非 $p$”（not $p$）称为 $p$ 的否定式，记作$\neg p$，符号$\neg$称作否定联结词（negation）。

运算规则：$\neg p$ 为真（true）当且仅当（if and only if）$p$ 为假（false）。

否定联结词在自然语言中的常词汇有：非、不是、并非、并不、否定等。

例如，设：$p$: AI 能精准理解人类所有的情感意图，$\neg p$: AI 不能精准理解人类所有的情感意图，则命题 p 为假、¬p 为真。

**定义 3.3**: 合取式与合取联结词

“$p$ 且 $q$”（$p$ and $q$）称为 $p$ 与 $q$ 的合取式，记作 $p\wedge q$，符号$\wedge$称作合取联结词（conjunction）。

运算规则：$p\wedge q$ 为真当且仅当 $p$ 和 $q$ 同时为真，其余情况 $p\wedge q$ 为假。

合取式的真值规则可简单归纳为“同真才真，一假则假”，在自然语言中的常词汇有：且、和、既… 又…、虽然… 但是…、不但… 而且…、同时等。

例如，设：$p$: 语言大模型能完成文本摘要，$q$: 语言大模型可脱离算力离线推理，$p\wedge q$: 语言大模型能完成文本摘要且可脱离算力离线推理，则 $p$ 为真，$q$ 为假，$p\wedge q$ 为假。

**定义 3.4**: 析取式与析取联结词

“$p$ 或 $q$”（$p$ or $q$，相容或）称为 $p$ 与 $q$ 的析取式，记作 $p\vee q$，符号$\vee$称作析取联结词（disjunction）。

运算规则：$p\vee q$ 为假当且仅当 $p$ 和 $q$ 同时为假，其余情况 $p\vee q$ 为真。

析取式的真值规则可简单归纳为“同假才假，一真则真（相容或）”，在自然语言中的常词汇有：或、或者、要么… 要么…（相容语境）、至少一个等。

例如，设：$p$: 智能交通系统可识别车辆违章行为，$q$: 智能交通系统能精准预测交通事故，$p\vee q$: 智能交通系统可识别车辆违章**或**能精准预测交通事故，则 $p$ 为真，$q$ 为假，$p\vee q$ 为真。

**定义 3.5**: 蕴含式与蕴含联结词

“如果 $p$，那么 $q$”（if $p$, then $q$）称为 $p$ 与 $q$ 的蕴含式，记作 $p\rightarrow q$，符号$\rightarrow$称作蕴含联结词（implication）；其中 $p$ 称为前件（hypothesis/antecedent），$q$ 称为后件（conclusion/consequent）。

运算规则：$p\rightarrow q$ 为假当且仅当 $p$ 为真且 $q$ 为假，其余情况 $p\rightarrow q$ 为真。

蕴含式的真值规则可简单归纳为“前真后假才假，其余均真”，在自然语言中的常词汇有：如果… 那么…、若… 则…、只要… 就…、倘若… 便…、当… 则…等。

**例 3.2：**设：$p$: 老师说这节课要随堂小测，$q$: 全班同学都带了笔和纸，$p\rightarrow q$: 若老师说这节课要随堂小测，则全班同学都带了笔和纸。求蕴含式 $p\rightarrow q$ 的真值。

解：当且仅当 $p$ 为真，$q$ 为假时，$p\rightarrow q$ 为假。其余三种情况均为真。

**定义 3.6**: 等价联结词

“$p$ 当且仅当 $q$”（$p$ if and only if $q$）称为 $p$ 与 $q$ 的等价式（也作双条件式），记作 $p\leftrightarrow q$，符号↔称作等价联结词（biconditional）。

运算规则：$p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 $p$ 和 $q$ 的真值相同（同真或同假），其余情况 $p\leftrightarrow q$ 为假。

双条件式 $p\leftrightarrow q$ （口语也称为等价式）的求真值规则可简单归纳为“真值相同为真，不同为假”，在自然语言中的常词汇有：当且仅当、等价于、充要条件、只要且只有… 才…等。

等价联结词↔也称为双条件联结词或双向蕴含联结词，$p\leftrightarrow q$ 是规范的逻辑表达式。

**例 3.3：**设：$p$: 当天是冬至节日，$q$: 这一天北半球白昼最短、黑夜最长，则 $p\leftrightarrow q$: 当天是冬至节日，当且仅当这一天北半球白昼最短、黑夜最长。求等价式 $p\leftrightarrow q$ 的真值。

解：根据等价式真值规则，$p$、$q$ 真值相同时 $p\leftrightarrow q$ 为真。本题中 $p$ 真则 $q$ 真，$p$ 假则 $q$ 假，故 $p\leftrightarrow q$ 为真。

**例 3.4：**命题“一元函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可微的充要条件是其在 $x_0$ 处导数 $f'(x_0)$ 存在。”的等价式表示及真值判定。

解：设：$p$: 一元函数 $f(x)$在 $x_0$ 处可微，$q$: 一元函数 $f(x)$在 $x_0$ 处导数 $f'(x_0)$存在；

等价式：$p\leftrightarrow q$：一元函数 $f(x)$在 $x_0$ 处可微，当且仅当其在 $x_0$ 处导数 $f'(x_0)$ 存在；

真值判定：由一元函数可微与可导的等价性定理，$p$ 与 $q$ 恒同真同假，故 $p\leftrightarrow q$ 为真。

将自然语言数学命题转化为形式化的真值判定，是用数理逻辑的通用规则规范数学的具体命题，数学中的充要条件证明的本质就是证明 $A\leftrightarrow B$ 为真，即分别证明“$A\Rightarrow B$（必要性）” 和 “$B\Rightarrow A$（充分性）”。

“语义对象→逻辑算子→命题公式” 是命题逻辑实现形式化的底层架构，是将自然语言逻辑推理进行纯符号化重构的标准途径。本节介绍的命题是原始语义对象，联结词是刻画命题间逻辑关系的核心算子，下一小节将介绍命题公式的构成。

### 3.1.2 命题公式及其语法

命题公式是命题逻辑从自然语言的模糊推理上升为严格形式推理的关键载体，形式合法且语义有效的命题公式，是保障命题逻辑形式推理语法严谨、语义保真且可验证的本质前提。严格定义的合法命题公式称为合式公式（Well-Formed Formula，记为 WFF），本教材中命题公式均指合式公式。

**1）命题公式的构成元素**

命题公式的构成分为基本符号和语法规则，只有符合规则的符号组合才是合法的命题公式。

命题变元（命题变项）：表示任意命题的符号，通常用 $p,q,r,s,p1,q1,r1$ 等表示。命题变元可赋值为真（T/1）或假（F/0），是命题公式的变量。

命题联结词（逻辑联结词）：表示命题间的逻辑关系的运算符号。

基本联结词有否定（¬）、合取（∧）、析取（∨）、蕴涵（→）、等价（↔），派生联结词由基本联结词定义，如异或（⊕）、与非（↑）、或非（↓）等。

圆括号( )为辅助符号，用于明确运算顺序，括号内的子公式必须先算。基本联结词由高到低的优先级为：1 级：¬；2 级：∧；3 级：∨；4 级：→；5 级：↔，同级联结词按从左到右的顺序进行计算。

和命题变项对应的命题常项也是构成合式公式的最基础元素，命题变项是 "真值待定的任意命题"，命题常项是 "真值确定的固定命题"，命题逻辑里最常见的命题常项就是 T（1）和 F（0）。

**2）命题公式的递归定义**

**定义 3.7**: 合式公式的递归定义

基例：单个命题变项 $p, q, r$ ⋯或单个命题常项 T,F 是合式公式，统称为原子命题公式。

归纳步：若 $A$、$B$ 均为合式公式，则：

（1）否定式：$\neg A$ 是合式公式；

（2）二元复合式：$(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\rightarrow B)$、$(A\leftrightarrow B)$是合式公式；

封闭性：当且仅当有限次应用上述两条规则构造的符号组合才是合式公式，

**3）命题逻辑形式语言 LP**

命题逻辑形式语言为命题逻辑构建了一套严格无歧义、可形式化操作的纯符号体系，该体系由命题变元、逻辑联结词、辅助括号构成的基础符号表，以及规定合式公式合法生成规则的形成规则两部分核心内容组成。

**4) *n* 层公式**

n 层公式是 n 层命题公式的简称，是对合式公式在纯语法结构维度的划分和复杂度的量化。层数是逻辑联结词嵌套的深度，与公式的真值、赋值、语义解释完全无关。

**定义 3.8**: *n* 层公式（*n*-layer formula）定义

设：LP 为命题逻辑形式语言；命题变元和常元为 LP 的基元（原子公式）；¬为一元联结词；设∘为二元联结词，且$\circ\in\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$；LP 中合式公式 $A$ 满足下述任一条件，则 $A$ 为 $n$ 层公式且 $d(A)=n$（$n\geq1$）。

0 层公式：所有原子公式为 0 层公式，即若 $A$ 是原子公式，则 $\mathrm{d}(A)=0$；

$n$ 层公式（$n\geqslant1$）：LP 中合式公式 $A$ 满足下述任一条件，则 $A$ 为 $n$ 层公式且 $d(A)=n$

① $A=\neg B$，其中 $B$ 为 $\mathcal{L}_P$ 中的 $n-1$ 层公式；

② $A=(B\circ C)$，其中 $B$、$C$ 为 LP 中的合式公式且 $\max(d(B),d(C))=n-1$；

当且仅当合式公式 $A$ 由上述 ①、② 规则有限次生成时，$A$ 为 LP 中的 $n$ 层公式（$n$ 为非负整数），且 A 具有唯一确定的语法层级 $d(A)$；非合式公式无层级划分。

**例 3.5：** 判定命题公式①$p$，②$\neg\neg p$，③$p\wedge q$，④$\neg p\rightarrow q$，⑤$\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$，⑥$((\neg p\wedge q)\rightarrow r)\leftrightarrow(\neg r\vee s)$的语法层级。

解：根据 $n$ 层公式定义，依次为 0 层、2 层、1 层、2 层、3 层、4 层公式。

命题公式层级判定口诀为"原子 0 层定基础，否定单层升，二元取大再加 1，嵌套拆内层，分支先标级"，准确对应层级判定规则。即所有原子公式层级固定为 0；否定每嵌套一

次，层级就升一层；二元联结词公式的层级由左右两个子公式的层级决定，先取二者的最大值，再加 1。

多层联结词嵌套的复杂公式核心是由内向外，层层求解，例如求$\neg(p\rightarrow\neg q)$的层级，先拆内层$\neg q$（1 层），再算中层 $p\rightarrow\neg q$（2 层），最后算外层$\neg(p\rightarrow\neg q)$（3 层）。针对多分支复合公式（含多个二元联结词，公式可明确拆分为左右两个独立分支），先分别计算每个分支的整体层级并做好标记，再对两个分支的层级取最大值，最后 + 1 得到整体公式层级，例如公式$\neg(p\wedge q)\leftrightarrow((\neg r\rightarrow s)\wedge t)$的求解。

### 3.1.3 命题公式语义与真值判定

命题公式的语法维度通过命题逻辑形式语言描述，命题公式的语义维度通过命题公式的赋值与真值判定体系描述，二者构成了完整的命题逻辑体系，缺一不可。

命题公式的赋值与真值判定体系包含赋值规则、真值计算规则、真值判定方法、与真值相关的分类四部分。赋值规则回答如何给原子变元指派真值，真值计算规则回答如何计算复杂复合公式的真值，真值判定方法回答如何高效判定一个公式在各种赋值下的真值，与真值相关的分类是根据真值分布对命题公式进行的标准化分类。

公式赋值是赋值规则在具体命题公式上的应用，下面通过公式赋值说明命题公式的赋值与真值判定体系。

**定义 3.9**: 公式赋值

设命题公式 $A$ 中含有的全部互不相同的命题变项为 $p_1, p_2,\dots, p_n$（$n\geqslant1$，$n\in\mathbb{N}^+$），给 $p_1, p_2,\dots, p_n$ 各指定一个确定的真值（真或假，通常记为 1 或 0），称为对命题公式 $A$ 的一个赋值，也称为解释，记为 $\sigma=(v_1,v_2,\dots, v_n)$，其中 $v_i\in\{0,1\}$，对应 $p_i$ 的指派真值。

若赋值 σ 使得命题公式 $A$ 的真值为真（1），则称 σ 为 A 的成真赋值；

若赋值 σ 使得命题公式 $A$ 的真值为假（0），则称 σ 为 A 的成假赋值。

若公式 $A$ 中含 $n$ 个互不相同的命题变项，则对 $A$ 的赋值共有 $2^n$ 个，且每个赋值都是有序的 $n$ 元真值组。

**1) 常值命题公式**

常值命题公式是不含任何命题变项的命题公式，这类公式要么是永真的重言式（常真式），要么是永假的矛盾式（常假式），公式的真值与赋值无关，其唯一赋值为“空指派”。真值随赋值变化（有真有假）的命题公式称为偶真式。

**例 3.6：**用真值表法求公式 $A=(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3)\vee(p_1\wedge p_2)$和 $B=(p\rightarrow q)\rightarrow r$ 赋值。

真值表法枚举公式所有命题变项的全部赋值，根据联结词优先级分步计算子公式及目标公式真值，然后判定赋值类型。

解：公式 $A=(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3)\vee(p_1\wedge p_2)$ 赋值。

公式变项有 $p_1,p_2,p_3$，赋值数为 $2^3=8$，按二进制递增序排列（000→111）；

联结词优先级：$\neg>\wedge>\vee$，拆分子公式：$\neg p_1$、$\neg p_2$、$\neg p_3$，$\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3$，$p_1\wedge p_2$。

构造真值表并计算：

表 3-1. 公式 $A=(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3)\vee(p_1\wedge p_2)$ 真值表

| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $\neg p_1$ | $\neg p_2$ | $\neg p_3$ | $\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3$ | $p_1\wedge p_2$ | $A$ | 赋值类型 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 成真赋值 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 成假赋值 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 成假赋值 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 成假赋值 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 成假赋值 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 成假赋值 |
| **1** | **1** | **0** | **0** | **0** | **1** | **0** | **1** | **1** | **成真赋值** |
| **1** | **1** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** | **1** | **1** | **成真赋值** |

判定赋值类型：

成真赋值：（0,0,1）、（1,1,0）、（1,1,1）

成假赋值：（0,0,1）、(0,1,0)、(0,1,1)、(1,0,0)、(1,0,1)

同样方法可求得 $B=(p\to q)\to r$ 的赋值。

**2) 可满足式与不可满足式**

命题公式的语义与公式的赋值密切相关，根据所有赋值下的真值分布，可将命题公式分为重言式、矛盾式、偶真式，三者严格互斥且穷尽所有公式。重言式无成假赋值，矛盾式无成真赋值，偶真式既有成真赋值也有成假赋值，该分类方法关注公式真值的稳定性，明确区分真值固定与真值可变的公式。

按是否存在成真赋值，可将公式分为可满足式和不可满足式。可满足式至少存在 1 个成真赋值，不可满足式无任何成真赋值（与矛盾式完全等价）。

可满足式和不可满足式的二分类，聚焦回答‘公式是否能为真’的核心问题，无需分析所有真值情况，降低判定成本。两种命题分类方法从理论与应用角度互补，完整分析了命题公式的语义。前者从研究角度把公式的语义本质 “说清楚”；后者立足应用服务把公式的核心判定 “做简单”。

## 3.2 命题逻辑等价演算

命题逻辑等价演算是真值判定基础上的形式化推演延伸，是回答如何在保真值的前提下变换公式，让真值判定更高效、更具推演性。其核心是基于逻辑等价的语义定义，提炼出一套形式化的变换规则（基本等价式 + 置换规则），通过公式的形式改写实现真值相关的各类分析，是对命题语义的 形式化推演表达。命题逻辑等价演算可从基础规则、形式变换、语义保真、目标导向 4 个维度进行描述。

### 3.2.1 逻辑等价式与等价演算

命题逻辑等价演算的基础规则包含逻辑等价式和置换规则，逻辑等价式定义哪些公式可以相互替换，置换规则规范逻辑等价式的具体应用方式，实现复杂公式的全域保真替换。二者互补统一，共同构成等价演算的底层规则基础。

**1）等值式及其判定**

等值式是表示两个命题公式逻辑等价的规范关系式，是等价演算的规则依据。等价表达式是满足逻辑等价关系的单个命题公式，是等价演算的操作对象。

**定义 3.10**: 等值式

设 $A$、$B$ 是两个命题公式，若对 $A$、$B$ 中所有命题变元的任意一组真值指派，公式 $A$ 和 $B$ 的真值始终完全相同，则称公式 $A$ 与 $B$ 逻辑等价，其符号化表达式 $A\Leftrightarrow B$ 为等值式，$\Leftrightarrow$为逻辑等价符。

等值式也常简称为等价式，等值式用$\Leftrightarrow$联结的两个命题公式互为等价表达式，例如等值式 $\neg(p\vee q)\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$ 中，$\neg(p\vee q)$是$\neg p\wedge\neg q$ 的等价表达式，反之亦然。等值式 $A\Leftrightarrow B$ 也意味着对应的双条件式 $A\leftrightarrow B$ 是重言式（ 永真式 ）。

等值式的判定一是根据所有赋值下真值恒同（语义层），二是通过判定双条件式 $A\leftrightarrow B$ 为永真式（公式层）。判定方法主要有真值表法、等价演算法和主范式法。

**真值表法判定等值式:**

真值表法以命题等值式的定义为依据，将待判定的两个命题公式置于同一真值表中，列出二者所有命题变元的全部真值组合，逐行验证两公式的真值是否一致，若所有赋值下二者均同真同假，则判定该等值式成立，否则判定该等值式不成立。

**例 3.7**：用真值表法判定等值式：$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$

解：待判定公式含 2 个命题变元，4 组互不重复的真值组合，按二进制序构造真值表并逐层计算真值：

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $P\vee Q$ | $\neg(P\vee Q)$ | $\neg P\wedge\neg Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

判定结论：对命题变元 $P$、$Q$ 的所有真值赋值，$\neg(P\vee Q)$与$\neg P\wedge\neg Q$ 的真值均相同，因此等值式$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$ 成立。

**等价演算法判定等值式:**

等价演算法以命题等值式的定义和基本等值式（等值律）为依据，将待判定的两个命题公式分别通过等值变形规则（置换规则）进行逐步推导，把二者化归为相同的最简命题公式形式，若两公式最终能推导出完全一致的结果，则判定该等值式成立，否则判定该等值式不成立。

**2）基本等值式**

基本等值式（等值律）是命题逻辑中不可再归约、非派生且无冗余的核心逻辑规则，这些规则覆盖了命题逻辑的所有核心运算符号，同时满足公理化完备性要求 。在命题公式规范化推导中通过基本等值式可推导命题逻辑中所有派生等值式。

**核心基本等值律:**

核心基本等值律是完全不可再归约的公理级规则，贴合命题逻辑的底层运算本质。

双重否定律、交换律、结合律、分配律、德・摩根律、排中律、矛盾律、零律、同一律

双重否定律（Double Negation Law） $\neg\neg A\Leftrightarrow A$

交换律(Commutative Law ) $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$，$A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$

结合律( Associative Law) $(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$

$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$

分配律( Distributive Law) $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

德摩根律(De Morgan's Laws ) $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$

$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

排中律(Law of the Excluded Middle ) $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$

矛盾律(Law of Contradiction ) $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$

零律(Domination Laws ) $A\vee 1\Leftrightarrow 1$, $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$

同一律(Identity Laws ) $A\vee 0\Leftrightarrow A$, $A\wedge 1\Leftrightarrow A$

**实用基础等值律:**

实操基本等值律虽然可由核心基本等值律推导，但因演算中高频使用被标准化为基本等值律，用于简化推导步骤。

幂等律(Idempotent Laws ) $A\vee A\Leftrightarrow A$，$A\wedge A\Leftrightarrow A$

吸收律(Absorption Laws ) $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$, $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$

蕴涵等值式(Implication Equivalence ) $A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$

双条件等值式(Biconditional Equivalence ) $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\to B)\wedge(B\to A)$

**3) 派生推理 / 等值规则**

派生推理规则是由基本等值律直接推导的推论，并非基本等值律本身，仅作为等值演算的常用辅助规则。

逆否律、等价否定律、归谬律

等价否定等值式(Negation of Biconditional ) $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$

归谬论(Reductio ad Absurdum ) $(A\to B)\wedge(A\to\neg B) \Leftrightarrow\neg A$

假言易位(Contrapositive Law ) $A\to B\Leftrightarrow\neg B\to\neg A$

**4) 等值演算**

等值演算的目标是以数理逻辑的基本等值式为依据，通过严格的代入 / 置换规则，对命题公式（及谓词公式）进行等价变形与化简，其所有演算过程的核心要求为保持公式的逻辑语义不变。

**定义 3.11**: 等值演算

等值演算是以基本等值式为基础，通过代入规则和置换规则，推演出新的逻辑等值式的过程。

代入规则和置换规则是等值演算过程中保持公式的逻辑语义不变的保障。代入规则利用重言式真值恒真的属性，保证替换后公式仍为重言式。置换规则利用等值式真值完全相同的属性，保证原公式整体真值不变。

**定义 3.12**: 置换规则

设 $A$ 是命题公式 $\Phi(A)$的子公式，若 $A\Leftrightarrow B$，则将 $\Phi(A)$中一处或多处 $A$ 替换为 $B$ 后得到的公式 $\Phi(B)$满足 $\Phi(A)\Leftrightarrow\Phi(B)$。

**例 3.8：** 证明 $p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$

**证：** 从左推右直接推演证明，设左式为 $L=p\to(q\to r)$，右式为 $R=(p\wedge q)\to r$，证明 $L\Leftrightarrow R$。

$L=p\to(q\to r)\Leftrightarrow p\to(\neg p\vee r)$ (蕴涵等值式，将 $q\to r$ 替换为 $\neg q\vee r$)

$\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$ (蕴涵等值式，将 $p\to(\neg q\vee r)$ 替换为 $\neg p\vee(\neg q\vee r)$ )

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$ (析取结合律，改变括号位置)

$\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$ (德摩根律的逆用)

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r=R$ (蕴涵等值式逆推, 将析取还原为蕴涵)

**结论:** 证明了 $p\to(q\to r)$与$(p\wedge q)\to r$ 是等值式，即 $p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$。

等值（⇔）是等价关系，传递性让单向变形链直接证得 $A\Leftrightarrow B$，对称性让双向等值天然成立。只有当证明过程中无法直接构造连续的等值变形链，只能先证逻辑蕴涵（⇒）时，才需要分别证 $A\Rightarrow B$ 和 $B\Rightarrow A$，才能证得 $A\Leftrightarrow B$ 。

**4) 不等值式及其判定**

**定义 3.13:** 不等值式（非逻辑等价式）

设 $A$、$B$ 是两个命题公式，若存在至少一组命题变元的真值指派，使得 $A$ 和 $B$ 的真值不同（一个为真，一个为假），则称 $A$ 与 $B$ 是不等值式，记作 $A\not\Leftrightarrow B$。

判定公式 $A,B$ 是等值($A\Leftrightarrow B$)还是不等值($A\not\Leftrightarrow B$)的方法有真值表法、等值变形法、寻找反例法和范式对比法。等值变形法利用等值演算，将其中一个公式逐步变形为另一个公式，根据等值关系的传递性判定。范式对比法借助命题公式 $A$、$B$ 的主析取范式（或主合取范式），若二者的范式完全相同则 $A$、$B$ 等值。

等值演算不能直接证明两个公式不等值，证明两个公式不等值的最简单方法是寻找反例法，即找到一个赋值使一个成真, 另一个成假。

**5）等值演算判断命题公式类型**

用等值演算法判断命题公式类型（永真式 / 重言式、永假式 / 矛盾式、可满足式），是命题逻辑中形式化、高效判定公式逻辑特征的核心方法，其核心目的是绕开繁琐的真值表枚举，通过等值变形将复杂公式化简为最简形式（永真 / 永假 / 简单可满足式），直接判定公式的逻辑本质，同时兼具理论推演价值和实际应用价值，是连接公式形式与逻辑含义的关键手段。

**例 3.9：**用等值演算法判断命题公式的类型

**(1) 公式：$q\wedge\neg(p\to q)$**

解：$q\wedge\neg(p\to q)$

$\Leftrightarrow q\wedge\neg(\neg p\vee q)$（蕴涵等值式：$A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$）

$\Leftrightarrow q\wedge(p\wedge\neg q)$ （ 德摩根律：$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$）

$\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge\neg q)$ （交换律：$A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$，结合律：$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$）

$\Leftrightarrow p\wedge 0$（矛盾律：$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$）

$\Leftrightarrow 0$（零律：$A\wedge 0\Leftrightarrow 0$）

综上，该命题公式为矛盾式。

**(2) 公式：$(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$**

解：$(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$（左右两侧同时应用蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$（交换律）

$\Leftrightarrow 1$（等价等值式推论：$A\leftrightarrow A\Leftrightarrow 1$）

综上，该命题公式为重言式。

**(3) 公式：$((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r$**

解：$((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r$

$\Leftrightarrow(p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律逆向应用提取公因子 p）

$\Leftrightarrow(p\wedge 1)\wedge r$ （排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$ （同一律）

公式的化简结果 $p\wedge r$ 其真值随命题变元的取值变化而变化，不是重言式也不是矛盾式，该命题公式为可满足式。

### 3.2.2 真值函数

真值函数将命题间的逻辑联结关系转化为可定量分析、严格推导的数学对象，把原本依赖自然语言和直观推理的命题逻辑转化为基于集合、函数的严格数学体系，实现了命题逻辑的形式化、公理化、系统化与语法语义的严格对应，也为命题公式的分类、判定、化简提供了统一的数学标准和理论依据与方法。

**1）真值函数的结构与属性**

**定义 3.14**: 真值函数

一个 $n$ 元真值函数是从所有真值构成的 $n$ 元组集合到真值集合的函数，即映射关系为 $f$:$\{T,F\}^n\rightarrow\{T,F\}$。

真值函数 $f$ 是命题公式语法与语义的综合映射，$n$ 元命题变量的定义值域是 $n$ 元组集合 $\{T,F\}^n$，值域是二元真值集$\{T,F\}$。$f$ 的实际取值可判定对应命题公式的类型，取值恒为$\{T\}$则命题公式是重言式，取值恒为$\{F\}$则命题公式为矛盾式，取值覆盖$\{T,F\}$则命题公式为可满足式。

**2）真值函数与命题公式**

命题公式与真值函数呈双向对应关系，任意 $n$ 元命题公式能唯一确定一个 $n$ 元真值函数 $f$，任意真值函数 $f$ 也至少存在一个或无穷多个命题公式。对于含相同命题变元的命题公式 $A$、$B$，若对应的真值函数 $f_A$ 和 $f_B$ 完全相同，则公式 $A$、$B$ 等值，即有 $A\Leftrightarrow B$ 。

命题公式中的 $n$ 个变元有 $2^n$ 种真值指派，每一种真值指派会使真值函数 $f$ 有 T/F 两种可能取值， $n$ 阶公式对应的 $n$ 元真值函数共有$2^{2^n}$ 个。

命题公式的形式可以有无穷多个，如 $p$、$p\vee p$、$p\wedge p$ 都是 1 阶公式，形式不同但等值，所有等值的公式对都对应同一个真值函数，而 $n$ 元真值函数仅有 $2^{2^n}$ 个，这意味着所有 $n$ 阶命题公式可被划分为 $2^{2^n}$个互不相交的等值类，每类公式的逻辑意义完全相同。这一结论将无穷的公式形式归约为有限的逻辑本质，只需研究每个等值类的代表元即可。

**3）一元真值函数**

设命题变元为 $p$，一元真值函数为 $f(p)$: $\{T,F\}\rightarrow\{T,F\}$，其枚举定义如下：

| 函数编号与记法 | 函数名称 | $p$ 取值 | 函数映射结果 $f(p)$ | 逻辑属性 |
|---|---|---|---|---|
| $f_0^{(1)}(p)$ | 常假函数 | $p$=F | $f_0^{(1)}(p)$=F | 恒取假值（F）（常函数） |
| | | $p$=T | $f_0^{(1)}(p)$=F | |
| $f_1^{(1)}(p)$ | 恒同函数 | $p$=F | $f_1^{(1)}(p)$=F | 与命题变元真值完全相同（恒等映射） |
| | | $p$=T | $f_1^{(1)}(p)$=T | |
| $f_2^{(1)}(p)$ | 否定函数 | $p$=F | $f_2^{(1)}(p)$=T | 与命题变元真值完全相反（取反） |
| | | $p$=T | $f_2^{(1)}(p)$=F | |
| $f_3^{(1)}(p)$ | | $p$=F | $f_3^{(1)}(p)$=T | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 常真函数 | $p$=T | $f_3^{(1)}(p)$=T | 恒取真值（T）（常函数） |

命题公式中的联结词是语法层面的符号，真值函数是语义层面的映射，联结词的逻辑意义必须通过真值函数的映射规则来定义。

一元真值函数是从{T,F}到{T,F}的一元映射，它为一元命题逻辑中的基本语法联结词分别设定了 4 个专属的语义映射规则。为否定联结词¬设定了否定函数 $f_2^{(1)}(p)$的映射规则为:在 $p$=F 时 $f_2^{(1)}(p)$=T、$p$=T 时 $f_2^{(1)}(p)$=F，体现了联结词¬取反的逻辑意义。

为无结词的命题变元 $p$ 设定了恒同函数 $f_1^{(1)}(p)$，其取值就是变元 $p$ 的取值。为矛盾式组合符号 $p\wedge\neg p$ 设定了常假函数 $f_0^{(1)}(p)$，变元 $p$ 的取值不影响 $f_0^{(1)}(p)$恒为 F。为重言式组合符号 $p\vee\neg p$ 设定了常真函数 $f_3^{(1)}(p)$，变元 $p$ 的取值不影响 $f_3^{(1)}(p)$恒为 T。这些有限且完备的映射规则让语法符号拥有了确定的逻辑意义。

对于任意形式的一元命题公式，其最终真值仅由 $p$=F 或 $p$=T 这 2 种指派决定，因此所有公式的真值规律只能穷尽出下面 4 种可能：① 无论 $p$ 取何值，公式恒为 F；② 公式真值与 $p$ 完全相同；③ 公式真值与 $p$ 完全相反；④ 无论 $p$ 取何值，公式恒为 T。这 4 种真值规律是二值逻辑下的全部可能，而 4 种一元真值函数正是对这 4 种真值规律的形式化、标准化刻画。

例如：和恒同函数 $f_1^{(1)}$(p)的对应的公式有：$p$、$p\wedge p$、$p\vee p$、$\neg\neg p$……；和否定函数 $f_2^{(1)}(p)$ 对应的公式有：$\neg p$、$\neg(p\wedge p)$、$\neg(p\vee p)$、$\neg\neg\neg p$……。这些公式虽然形式无限，但真值规律相同。

**4）二元真值函数**

二元真值函数记为 $f^{(2)}(p,q)$，两个命题变元共 4 种真值指派组合，$2^{2^2}$=16 个真值函数，枚举定义如下表：

| 函数编号与记法 | 函数名称 | 命题变元 $p,q$ 取值 | $f^{(2)}(p,q)$映射结果 | 逻辑属性 |
|---|---|---|---|---|
| $f_0^{(2)}(p,q)$ | 常假函数 | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 0；0；0；0 | 恒取假值（0）（常函数） |
| $f_1^{(2)}(p,q)$ | 合取函数 | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 0；0；0；1 | 仅变元均为 1 时取 1（合取映射） |
| $f_2^{(2)}(p,q)$ | 蕴涵非函数 | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 0；0；1；0 | $P$=1 且 $q$=0 时取 1（逆蕴涵否定） |
| $f_3^{(2)}(p,q)$ | 投影 p 函数 | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 0；0；1；1 | 结果与 p 真值完全相同（p 投影） |
| $f_4^{(2)}(p,q)$ | 反蕴涵非函数 | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 0；1；0；0 | $P$=0 且 $q$=1 时取 1（蕴涵否定） |
| $f_5^{(2)}(p,q)$ | 投影 q 函数 | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 0；1；0；1 | 结果与 q 真值完全相同（q 投影） |
| $f_6^{(2)}(p,q)$ | 异或函数 | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 0；1；1；0 | $p,q$ 真值不同时取 1（异或映射⊕） |
| $f_7^{(2)}(p,q)$ | 析取函数 | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 0；1；1；1 | 仅 $p,q$ 均为 0 时取 0（析取映射∨） |
| $f_8^{(2)}(p,q)$ | 合取非函数（与非） | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 1；1；1；0 | 合取函数的否定（与非映射↑） |
| $f_9^{(2)}(p,q)$ | 等值函数 | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 1；0；0；1 | $p,q$ 真值相同时取 1（等值映射↔） |
| $f_{10}^{(2)}(p,q)$ | 否定 q 函数 | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 1；0；1；0 | 结果与 q 真值完全相反（q 否定） |
| $f_{11}^{(2)}(p,q)$ | 蕴涵函数 | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 1；1；0；1 | $P$=1 且 $q$=0 时取 0（蕴涵映射→） |
| $f_{12}^{(2)}(p,q)$ | 否定 p 函数 | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 1；1；0；0 | 结果与 $p$ 真值完全相反（$p$ 否定） |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f_{13}^{(2)}(p,q)$ | 反蕴涵函数 | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 1；0；1；1 | $P$=0 且 $q$=1 时取 0（反蕴涵映射←） |
| $f_{14}^{(2)}(p,q)$ | 析取非函数（或非） | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 1；0；0；0 | 析取函数的否定（或非映射↓） |
| $f_{15}^{(2)}(p,q)$ | 常真函数 | 0,0；0,1；1,0；1,1 | 1；1；1；1 | 恒取真值 1（常函数） |

**5）*n* 元真值函数**

真值函数是以命题变元的真值组合为输入，以唯一的命题真值为输出的映射关系，一元、二元是 $n$ 元真值函数的基础特例。一元真值函数为 $F^{(1)}:\{0,1\}\to\{0,1\}$，二元真值函数为 $F^{(2)}:\{0,1\}^2\to\{0,1\}$），二元真值函数为 $F^{(n)}:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$。

**定义 3.15**: $n$ 元真值函数

设 $n$ 为正整数，$n$ 元真值函数是一个从 $n$ 维 0-1 向量集合$\{0,1\}^n$到集合$\{0,1\}$的单值映射，记为 $F^{(n)}:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$，也可简记为 $F(p_1, p_2,\ldots, p_n)$，每个命题变元 $p_i\in\{0,1\}$，输出 $F(p_1, p_2,\ldots, p_n)\in\{0,1\}$。

$2^{2^n}$个 $n$ 元真值函数对应$2^{2^n}$套映射规则，在满足全覆盖、单值性和独立性的底层约束下，完成对 $2^n$ 个输入组合的 0/1 赋值。这些映射规则一部分是有合取（∧）、析取（∨）、蕴含（→）等对应的典型规则，另一部分是根据需求自由定义的规则。规则的自定义是为了贴合实际要解决的问题，所有自定义规则都需遵循二值逻辑和映射的客观约束。对于 AI 算法设计者或数据科学家，其制定依据可能是为了实现特征筛选、逻辑推理、决策判断问题。例如在设计医疗诊断专家系统时，为了刻画“多个症状同时满足才判定为某病症”的逻辑，会根据医学诊断的实际需求自定义 $n$ 元真值函数规则： 仅当所有症状对应的命题变元均为 1（症状存在）时输出 1（判定患病），其余输出 0。

### 3.2.3 联结词完备集

联结词完备集也称作全功能联结词组，其核心作用是解决经典命题联结词的两个关键问题：一是厘清 ¬、∧、∨、→、↔等经典联结词的冗余性，例如蕴含联结词可由否定与析取表示，即 $p\to q\Leftrightarrow\neg p\vee q$；二是明确经典联结词组合的表达能力边界，明确最少需要几个联结词能实现表达所有的 $n$ 元真值函数。筛选出的联结词完备集可用最少的初始联结词构建无冗余的公理系统，让不同逻辑系统之间的等价性证明成为可能，为数字电路、程序设计、逻辑推理等领域提供极简的实现方案，降低设计和计算复杂度。

**定义 3.16**: 联结词完备集

设 $S$ 是一个联结词集合, 如果任何 $n(n\geq1)$ 元真值函数都可以由仅含 $S$ 中的联结词构成的公式表示,则称 $S$ 是联结词完备集（全功能集）。

根据定义，联结词完备集并非唯一，只要能表示所有 $n(n\geq1)$ 元真值函数就是完备集。不同完备集的核心区别在于联结词的组成、数量，以及由此带来的冗余度差异。冗余度越高则联结词数量越多、表达越直观，冗余度为 0（极小完备集）则联结词数量最少、是理论与应用的核心形式。

**1）常见的联结词完备集**

**定理 3.1：**下列逻辑连接词集合是联结词完备集。

(1) $S_1=\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$　(全量完备集)

(2) $S_2=\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$

(3) $S_3=\{\neg, \wedge, \vee\}$

(4) $S_4=\{\neg, \wedge\}$

(5) $S_5=\{\neg, \vee\}$

(6) $S_6=\{\neg, \rightarrow\}$

利用双条件等值式 $A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$ 剔除(1)的等价联结词$\leftrightarrow$ 得到完备集(2)；

利用蕴含等值式 $A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B$ 剔除(2)的蕴含联结词$\rightarrow$ 得到完备集(3)；

利用双重否定律、德摩根律推导的 $A\vee B \Leftrightarrow \neg\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A\wedge\neg B)$ 剔除(3)的 联结词$\vee$ 得到完备集(4)；

利用德摩根律 $A\wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A\vee\neg B)$ 剔除(3)的 联结词$\wedge$得到完备集(5)；

利用双重否定律、蕴含等值式推导的 $A\vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A)\vee B \Leftrightarrow \neg A\rightarrow B$ 剔除(3) 中剔除合取联结词$\wedge$、析取联结词$\vee$，新增由等值式转化而来的蕴含联结词$\rightarrow$，保留否定联结词$\neg$，得到完备集 (6)。

**2）与非联结词 NAND 与或非联结词 NOR**

引入与非联结词和或非联结词并非单纯增加联结词种类，而是从理论完备性到工程实用性的双重延伸，既解决了联结词极简表达的理论问题，又为逻辑电路、计算机硬件设计提供了唯一可实现的工程基础。

与非式: $p\uparrow q\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)$, $\uparrow$称作与非联结词，$p\uparrow q$ 为真当且仅当 $p,q$ 不同时为真。

或非式: $p\downarrow q\Leftrightarrow\neg(p\vee q)$, $\downarrow$称作或非联结词，$p\downarrow q$ 为真当且仅当 $p,q$ 不同时为假。

**定理 3.2：** $\{\uparrow\},\{\downarrow\}$是两个单元素联结词完备集。

**证：**因$\{\neg,\wedge\}$是已知完备集，只需证明否定$\neg$、合取$\wedge$可仅由与非$\uparrow$表示，即可证$\{\uparrow\}$是完备集。

①用$\uparrow$表示否定联结词$\neg$：$\neg p \Leftrightarrow \neg(p\wedge p) \Leftrightarrow p\uparrow p$

②用$\uparrow$表示合取联结词$\wedge$：$p\wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p\wedge q) \Leftrightarrow \neg(p\uparrow q) \Leftrightarrow (p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q)$

证明结论：已证$\neg,\wedge$均可仅由与非$\uparrow$有限次组合表示，而$\{\neg,\wedge\}$是命题逻辑的基础联结词完备集，根据联结词完备集的判定定理，$\{\uparrow\}$能表示出已知完备集$\{\neg,\wedge\}$，因此$\{\uparrow\}$也能表示所有 n 元真值函数，即$\{\uparrow\}$是联结词完备集。

对于$\{\downarrow\}$可用类似方法证明。

联结词完备集是命题逻辑中具备全域表达能力的联结词集合，其核心作用是划定能表示所有 $n$ 元真值函数的联结词组合范围，是判断联结词表达能力的基础依据。极小联结词完备集是无冗余的完备集，单元素联结词完备集是极小完备集的终极精简形式，是数理逻辑理论与数字工程应用的关键衔接点，为逻辑电路设计中通用逻辑门的实现提供了核心理论依据，实现了从抽象逻辑到物理硬件的落地。

## 3.3 范式

命题公式千变万化的形式会带来的逻辑分析、推理、计算的混乱与低效。命题公式的标准化模板（范式）是对逻辑含义的标准化表达，在不改变公式的逻辑含义，仅通过统一的结构形

式，解决了形式多样带来的判定难、推理难、应用难” 问题。析取范式 、合取范式是其核心标准化模板。

### 2.3.1 析取范式与合取范式

析取范式（Disjunctive Normal Form, DNF）和合取范式（Conjunctive Normal Form, CNF）是命题公式的两类基础标准化形式，让命题逻辑的分析从依赖形式的人工演算变为基于结构的系统分析，可直接通过结构分析判定命题公式的核心逻辑属性（永真、永假、可满足），而无需依赖真值表。

**定义 3.17:**简单析取式与简单合取式

简单析取式:有限个文字构成的析取式，如： $p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

简单合取式:有限个文字构成的合取式，如： $p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

其中，文字（Literal）是命题变元本身，或命题变元的否定式$\neg p$，是原子命题。

将命题公式转化为范式的过程，是将复杂公式拆解为标准简单式，再按规则重组的分步算法，而简单析取 / 合取式正是这一算法的核心拆解目标，让范式的构成有了不可再分的基础单元 。

**定理 3.3：**简单析取 / 合取式的真值判定

设 $A$ 是简单析取式，$B$ 是简单合取，则

(1) $A$ 是重言式，当且仅当 $A$ 中同时包含某一个命题变项及其否定；

(2) $B$ 是矛盾式，当且仅当 $B$ 中同时包含某一个命题变项及其否定。

定理 3.3 是利用简析取/合取式命题公式判定重言 / 矛盾式的基础定理，是范式构造与应用的关键结论。利用真值表法判定公式类型，其计算量随着变项数呈指数级增长，而该定理将真值判定转化为结构观察，对简单析取 / 合取式实现快速判定，是命题逻辑中第一个脱离具体真值计算、基于公式形式结构判定属性的定理，是复杂公式的形式化判定的基础。

**例 3.10：**判定公式的真值类型：

(1) $(p\vee\neg p)\wedge(q\vee\neg q\vee r)$; (2) $(p\wedge\neg p)\vee(q\wedge\neg q\wedge r)$; (3) $(p\vee\neg q)\wedge(r\wedge s)$

**解 (1)：**该公式为合取范式，拆分为简单析取式：$A_1= p\vee\neg p$，$A_2= q\vee\neg q\vee r$。

$A_1$ 是重言式；$A_2$ 含同一命题变项 $q$ 及其否定，也是重言式。

公式(1)中的所有简单析取式均为重言式，故公式(1)是重言式（永真式）。

**解 (2)：**该公式为析取范式，拆分为简单合取式：$B_1= p\wedge\neg p$，$B_2= q\wedge\neg q\wedge r$；

$B_1$ 和是矛盾式；$B2$ 含同一命题变项 $q$ 及其否定，也是矛盾式；

公式(2)中的所有简单合取式均为矛盾式，故公式(2)是矛盾式（永假式）。

**解 (3)：**该公式为非标准范式的复合公式，可直接拆分出简单析取式、简单合取式，分别用定理 3.3 判定支公式属性，再结合合取运算的真值规则判定整体。

设 $C_1= p\vee\neg q$ 为简单析取式，但非重言式；$C_2=r\wedge s$ 为简单合取式，但非矛盾式；

因 $C_1$ 可假、$C_2$ 可真，公式 $C_1\wedge C_2$ 存在成假赋值和成真赋值，故公式(3)是可满足式（非重言、非矛盾）。

**定义 3.18:**析取范式与合取范式

析取范式 DNF：由有限个简单合取式通过析取联结词$\vee$构成的命题公式。

合取范式 CNF：由有限个简单析取式通过合取联结词$\wedge$构成的命题公式。

如$(p\wedge\neg q)\vee(r\wedge s)$和$(p\wedge\neg q\wedge r)\vee\neg s$是析取范式，$(p\vee\neg q)\wedge(r\vee s)$和$(p\vee\neg q\vee r)\wedge\neg s$是合析取范式。

范式是命题公式的标准化拆解形式，析取范式与合取范式是其基础形式。简单析取式与简单合取式是构建析取范式、合取范式的最小单元。对同一个命题公式，通过不同的等值演算步骤，可转化为多个结构不同但等值的基础范式。如公式$p\vee q$的析取范式就有$(p\wedge p)\vee q, p\vee(q\wedge q)\vee(p\wedge p)$等形式。

**定理 3.4：**析取范式（DNF）/ 合取范式（CNF）的真值判定

(1) 一个析取范式（DNF）是矛盾式，当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式。

(2) 一个合取范式（CNF）是重言式，当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

对于复杂的命题公式，可根据定理 3.4 拆分判定所有基础单元，然后根据 3.3 观察单元结构，最后综合判定范式的真值类型。

所有命题公式能否拆解成标准的 DNF/CNF 形式，取决于所有命题公式中是否存在 DNF/CNF，范式存在性定理是 DNF/CNF 成为通用标准形式的逻辑前提。

**定理 3.5：**范式存在性定理

任意命题公式$A$，均存在与之等值的析取范式（$A_{DNF}$）和合取范式（$A_{CNF}$）。

证明思路：构造性证明， 通过对任意命题公式执行三步通用的等值变形，可分别得到其析取范式和合取范式。变形过程仅依赖命题逻辑的基本等值式，保证变形后公式与原公式逻辑等值，且最终形式满足析取范式 / 合取范式的定义。

**证：**

步骤 1：消去公式$A$中的非基本联结词→和↔，得到$A_1$

利用基本等值式：蕴涵等值式$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$和等价等值式$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$

步骤 2：将$A_1$中的否定联结词¬内移至命题变元前端，并化简得到$A_2$满足$A\Leftrightarrow A_1$

利用基本等值式：德摩根律将作用于复合公式的否定词¬逐步内移；双重否定律消去连续的否定词，得到公式$A_2$，满足$A_1\Leftrightarrow A_2$，且$A_2$中否定词仅作用于单个命题变元（无$\neg(P\vee Q)$、$\neg(P\wedge Q)$、$\neg\neg$P 形式）。

步骤 3：利用分配律整理为范式形式

此时$A_2$仅含直接作用于变元的¬、∧和∨，通过分配律调整联结词的作用范围可分别得到与 A2 等值的析取范式和合取范式。

结论：对任意命题公式$A$，通过上述三步构造性变形，可同时得到与之等值的析取范式$A_{DNF}$ 和合取范式$A_{CNF}$ ，故范式存在性定理得证。

**例 3.11：**求$\neg(p\rightarrow q)\vee\neg r$的析取范式与合取范式

$\neg(p\rightarrow q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\vee\neg r$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee\neg r$ （德摩根律，得到析取范式）

$\Leftrightarrow(p\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee\neg r)$ （分配律，得到合取范式）

范式存在性定理保证了对任意命题公式$A$有$A_{DNF}$和$A_{CNF}$存在，满足$A\Leftrightarrow A_{DNF}$，$A\Leftrightarrow A_{CNF}$，但未约束变形过程中的等值化简方式，等值变形的多样性导致范式形式的非唯一性。这需要对析取/合取范式进一步细分为主析取 / 主合取范式进行进一步约束。

求范式的具体方法与范式存在性定理的构造性证明的逻辑依据与操作框架一致，是定理构造性证明的实际应用。

### 2.3.2 主析取范式 PDNF 与主合取范式 PCNF

任意命题公式 $A$ 有 $A_{DNF}$ 和 $A_{CNF}$ 存在，等值化简方式的多样性同会生成形式多样的 $A_{DNF}$ 和 $A_{CNF}$。主析取范式与主合取范式是对基础范式 DNF/CNF 进行了唯一化、精细化约束后得到的形式唯一终极规范范式，极小项 / 极大项是其核心标准单元，是保证主范式形式唯一性的关键。

**定义 3.19:** 极小项与极大项

设命题公式包含 $n$ 个互异的命题变元 $p_1, p_2,\ldots, p_n$，若一个简单合取式满足以下两个条件，则称该简单合取式为关于这 $n$ 个命题变元的极小项（minterm）：①变元全覆盖：每个命题变元 $p_i$（i=1,2,…,$n$）恰好以自身（$p_i$）或其否定（$\neg p_i$）的形式出现一次；②无冗余文字：合取式中不含重复的文字，也不含矛盾式文字（如 $p\wedge\neg p$，此类文字会使析取式恒真，无范式意义）。

设命题公式包含 $n$ 个互异的命题变元 $p_1, p_2,\ldots, p_n$，若一个简单析取式满足以下两个条件，则称该简单析取式为关于这 $n$ 个命题变元的极大项（maxterm）：①变元全覆盖：每个命题变元 $p_i$（$i$=1,2,…,n）恰好以自身（$p_i$）或其否定（$\neg p_i$）的形式出现一次；②无冗余文字：析取式中不含重复的文字，也不含重言式文字（如 $p\vee\neg p$，此类文字会使析取式恒真，无范式意义）。

在定义中，文字是范式体系中关于命题变元 $p$ 仅有的两种形式 $p$ 和$\neg p$。简单合取式是指有限个文字的合取式，简单析取式是指有限个文字的析取式。在定义中剔除无真值赋值意义的恒值公式 $p\wedge\neg p$ 和 $p\vee\neg p$，是为了保证极小 / 极大项的真值唯一性、编码唯一性和数量唯一性。

例如：$\neg p\wedge\neg q$，$\neg p\wedge\neg q\wedge$r　是极小项

$\neg p\vee\neg q$，$\neg p\vee\neg q\vee$r　是极大项

**1）极小项的形态特征与真值特征**

$n$ 元命题公式的极小项的识别口诀为全变元，纯合取，无矛盾，一真余假。

形态特征：包含 $n$ 个互异命题变元，每个变元仅以自身或其否定形式仅仅出现一次，同一变元的自身或其否定形式不会同时出现（析取式恒真）。公式中仅含合取联结词，无其他联结词，亦无对复合公式的否定。真值特征满足“一真余假”，即在 $n$ 个变元的 $2^n$ 组真值赋值中，恰有唯一一组赋值使该极小项为真，其余赋值下均为假。如极小项$\neg p\wedge\neg q$，仅当唯一一组赋值 $p$=0、$q$=1 时为真，其余赋值均为假。

**2）极大项的形态特征与真值特征**

$n$ 元命题公式的极大项的识别口诀为全变元，纯析取，无重言，一假余真。

形态特征：包含 $n$ 个互异命题变元，每个变元仅以自身或其否定形式仅仅出现一次，同一变元的自身或其否定形式不会同时出现（合取式恒假）。公式中仅含析取联结词，无其他联结词，亦无对复合公式的否定。真值特征满足“一假余真”，即在 $n$ 个变元的 $2^n$ 组真值赋值中，恰有唯一一组赋值使该极大项为假，其余赋值下均为真。如极大项 $\neg p\vee\neg q$，仅当唯一一组赋值 $p$=1、$q$=1 为假，其余赋值均为真。

**2）极小项 / 极大项的标准化命名**

单个命题变元有自身和否定 2 种选择，$n$ 元命题公式会形成 $2^n$ 个互异的极小项 / 极大项，并且恰好匹配 $2^n$ 组真值赋值。在极小项 / 极大项的标准化命名中，通过唯一编码赋予标准化单元可识别、可运算的符号标识，最终实现主范式形式唯一的通用符号规范。

编码记法是极小项、极大项的核心标准化命名方式，以 $n$ 个互异命题变元的固定排列顺序为前提，通过 0-1 二进制编码及十进制转化，赋予每个极小项 / 极大项唯一标识，极小项固定用小写英文字母 $m$，极大项固定用大写英文字母 $M$。

$m_k$ 的下标 $k$ 是 $n$ 位二进制，就是该极小项的唯一成真赋值，$m_k$ 的十进制编码记法是将二进制 $k$ 转化成十进制形式。$M_k$ 的下标 $k$ 是 $n$ 位二进制，就是该极大项的唯一成假赋值，$M_k$ 的十进制编码记法是将二进制 $k$ 转化成十进制形式。

**例 3.12：** 3 元命题变元 $p,q,r$ 的极小项与极大项赋值与编码

| 极小项（Minterm） | 成真赋值（$p,q,r$） | 编码记法 | 极大项（Maxterm） | 成假赋值（$p,q,r$） | 编码记法 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$ | 0 0 0 | $m_0$ | $p\vee q\vee r$ | 0 0 0 | $M_0$ |
| $\neg p\wedge\neg q\wedge r$ | 0 0 1 | $m_1$ | $p\vee q\vee\neg r$ | 0 0 1 | $M_1$ |
| $\neg p\wedge q\wedge\neg r$ | 0 1 0 | $m_2$ | $p\vee\neg q\vee r$ | 0 1 0 | $M_2$ |
| $\neg p\wedge q\wedge r$ | 0 1 1 | $m_3$ | $p\vee\neg q\vee\neg r$ | 0 1 1 | $M_3$ |
| $p\wedge\neg q\wedge\neg r$ | 1 0 0 | $m_4$ | $\neg p\vee q\vee r$ | 1 0 0 | $M_4$ |
| $p\wedge\neg q\wedge r$ | 1 0 1 | $m_5$ | $\neg p\vee q\vee\neg r$ | 1 0 1 | $M_5$ |
| $p\wedge q\wedge\neg r$ | 1 1 0 | $m_6$ | $\neg p\vee\neg q\vee r$ | 1 1 0 | $M_6$ |
| $p\wedge q\wedge r$ | 1 1 1 | $m_7$ | $\neg p\vee\neg q\vee\neg r$ | 1 1 1 | $M_7$ |

**4）极小项与极大项的对偶性**

极小项与极大项的对偶性是指在同一命题变元组下，下标相同的极小项 $m_i$ 和极大项 $M_i$ 互为命题否定，且二者的真值特征、形式结构呈严格对偶关系，即：$\neg m_i\equiv M_i,\neg M_i\equiv m_i$。对偶性体现了极小项和极大项的精准双向转换。在例 3.10 中，$p=0, q=1,r=1$ 是 $m_3$ 的成真赋值，也是 $M_3$ 的成假赋值。

**定义 3. 20：** 主析取范 PDNF 与主合取范式 PCNF

设 $A$ 是含 $n$ 个命题变元 $p_1, p_2,\dots, p_n$ 的命题公式，若 $A$ 的一个析取范式仅由这 $n$ 个变元构成的极小项组成，且该析取范式与 $A$ 逻辑等价，则称此析取范式为 $A$ 的主析取范式。

设 $A$ 是含 $n$ 个命题变元 $p_1, p_2,\dots, p_n$ 的命题公式，若 $A$ 的一个合取范式仅由这 $n$ 个变元构成的极大项组成，且该析取范式与 $A$ 逻辑等价，则称此析取范式为 $A$ 的主合取范式。

矛盾式无成真指派，约定其主析取范式为空式,重言式的主析取范式包含全部 $2^n$ 个极小项。重言式无成假指派，约定其主合取范式为空式,矛盾式的主合取范式包含全部 $2^n$ 个极大项。

**例 3.13：** 设命题变项为 $p,q,r$，$n=3$ 时：

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\Leftrightarrow m_1\vee m_3$， 该式为主析取范式（PDNF）；

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\Leftrightarrow M_1\wedge M_5$，该式为主合取范式（PCNF）。

范式是命题逻辑中命题公式的标准化表达形式，分为析取范式（DNF）和合取范式（CNF）两大基础类型；极小项和大项是满足 $n$ 个命题变元均恰好出现一次的特殊形式。主析取范式（PDNF）是析取范式的标准化形式，由公式成真指派对应的全部极小项析取而成，主合取范式（PCNF）是合取范式的标准化形式，由公式成假指派对应的全部极大项合取而成，是范式体系的最高层次，且极小项与极大项的对偶性又实现了 PDNF 与 PCNF 的相互转化，让整个范式体系形成层层递进、相互关联的逻辑整体。

**5）等值演算法求主析取范式 (PDNF) 和主合取范式 (PCNF)**

求主析取范式 (PDNF) 和主合取范式 (PCNF) 的方法除真值表法外，另一种称为公式推演法或等值演算法，下面以实例为引导说明等值演算法的主要步骤。

实例推导：求公式 $A{:}p\rightarrow(q\wedge r)$的主析取范式 (PDNF) 与主合取范式 (PCNF)

1）求主析取范式（PDNF）

步骤 1：$p\rightarrow(q\wedge r)\Leftrightarrow\neg p\vee(q\wedge r)$（蕴涵等值式：$p\rightarrow q\Leftrightarrow\neg p\vee q$）

得到 2 个简单合取式：$B_1=\neg p$（缺少变项 $q$、$r$），$B_2=q\wedge r$（缺少变项 $p$）。

步骤 2：对缺少变项的简单合取式补元展开为极小项

① 对 $B_1$ 补 $q$、$r$：

$\neg p\Leftrightarrow\neg p\wedge(q\vee\neg q)$ （同一律、排中律）

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$ （分配律）

$\Leftrightarrow((\neg p\wedge q)\wedge(r\vee\neg r))\vee((\neg p\wedge\neg q)\wedge(r\vee\neg r))$（补变项 r）

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （分配律）

②对 $B_2$ 补 $p$：

$q\wedge r\Leftrightarrow(q\wedge r)\wedge(p\vee\neg p)$（排中律+同一律）

$\Leftrightarrow(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$（分配律）

③合并展开式，得到含极小项的析取式：

$\neg p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

步骤 3：消去重复的极小项$(\neg p\wedge q\wedge r)$

$(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

步骤 4：编码极小项并按下标升序排列

按 $p,q,r$ 顺序，T=1，F=0，将极小项转化为二进制编码，再转十进制下标 $m_i$：

$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$：$000\rightarrow m_0$

$\neg p\wedge\neg q\wedge r$：$001\rightarrow m_1$

$\neg p\wedge q\wedge\neg r$：$010\rightarrow m_2$

$\neg p\wedge q\wedge r$：$011\rightarrow m_3$

$p\wedge q\wedge r$：$111\rightarrow m_7$

按下标升序排列，得到最终主析取范式：

$p\rightarrow(q\wedge r)\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_7=\sum m_{0,1,2,3,7}$

2）求主合取范式 (PCNF)

步骤 1：消去联结词→

$p\to(q\wedge r)\Leftrightarrow\neg p\vee(q\wedge r)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)$（分配律）

得到 2 个简单析取式：$C_1=\neg p\vee q$（缺少变项 $r$），$C_2=\neg p\vee r$（缺少变项 $q$）。

步骤 2：对缺少变项的简单析取式补元展开为极大项

① 对 $C_1$ 补 r：

$\neg p\vee q\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\vee(r\wedge\neg r)$ (同一律、矛盾律)

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$ (分配律)

② 对 $C_2$ 补 $q$：

$\neg p\vee r\Leftrightarrow(\neg p\vee r)\vee(q\wedge\neg q)$（矛盾律 + 同一律）

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$（分配律）

③ 合并展开式，得到含极大项的合取式：

$p\to(q\wedge r)\Leftrightarrow(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$

步骤 3：消去重复的极大项$(\neg p\vee q\vee r)$

$(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$

步骤 4：编码极大项并按下标升序排列

按 $p,q,r$ 顺序，成假指派为二进制编码（F=0，T=1），将极大项转化为二进制编码，再转十进制下标 $M_{\mathrm{i}}$：

$\neg p\vee q\vee r$：成假指派 $100\to M_4$

$\neg p\vee q\vee\neg r$：成假指派 $101\to M_5$

$\neg p\vee\neg q\vee r$：成假指派 $110\to M_6$

按下标升序排列，得到最终主合取范式：

$p\to(q\wedge r)\Leftrightarrow M_4\wedge M_5\wedge M_6=\prod M_{4,5,6}$

**6）PDNF/PCNF 的构造原则**

极小项、极大项的总数仅由命题变元的个数 $n$ 决定，各有 $2^n$ 个，和具体公式 $A$ 的结构和真假值无关。到底选用哪些极小项和极大项表示公式 $A$，则根据公式 $A$ 自身的成真 / 成假指派决定。A 的成真指派对应极小项、成假指派对应极大项，最终形成与 $A$ 真值等价的主析取 / 主合取范式。

例如，有命题变元 $p$、$q$、$r$，如例 3.10 所示，极小项、极大项各有 8 个。

对于重言式 $A=p\vee\neg p$，有 8 个成真指派，0 个成假指派，则主析取范式选择全部 8 个极小项，且无主合取范式。

对于矛盾式 $A=p\wedge\neg p$，0 个成真指派，8 个成假指派，则无主析取范式、选择全部 8 个极大项构成主合取范式。

对于可满足式 $A=(p\wedge q)\to r$，只有指派 110 才能使 $A$ 为假，则选用极大项 $M_6$ 构成主合取范式，其余 7 个成真指派对应的极小项构成主析取范式 $m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$。

由极小项与极大项的对偶性得知，同一个指派对 $m_i$ 为真则对 $M_i$ 必为假，对 $M_i$ 为假则对 $m_i$ 必为真，对含 $n$ 个命题变项的公式 $A$，用来表示的极小项与极大项的总数固定为 $2^n$ 个，并且极小项与极大项下标集必互补。

**7）利用对偶性求主合取范式（PCNF）**

以 $p\to(q\wedge r)\Leftrightarrow\sum m_{0,1,2,3,7}$ 为例求主合取范式。

解：

定参数：公式含 3 个命题变元 $p,q,r$，$n$=3，全体下标集 $U$={0,1,2,3,4,5,6,7}，极小项 / 极大项总数各为 $2^3$=8）；

提已用下标：已求的主析取范式$\sum m_{0,1,2,3,7}$，得极小项下标集 $S_m$={0,1,2,3,7}；

求补集下标：利用对偶性的下标互补性，得极大项下标集 $S_M$=$U-S_m$={4,5,6}；

求主合取范式：将补集下标对应极大项合取得到 PCNF，即 $p\rightarrow(q\wedge r)\Leftrightarrow\prod M_{4,5,6}$。

**8）主析取 / 主合取范式的存在唯一性定理**

范式存在性定理(定理 3.5)是命题逻辑范式理论的基础，回答了任意命题公式都能转化为范式的问题。主析取 / 主合取范式的存在唯一性定理通过范式的标准化、规范化实现了唯一性，解决了如何让范式成为命题公式精准判定工具的问题，是主范式法判定公式等价、类型、真值赋值的理论依据。

**定理 3.6：**主析取范式的存在唯一性定理

设 A 为含 $n$ 个命题变项的任意命题公式，则：

存在性：若 $A$ 为非矛盾式，则必至少存在一个与 $A$ 逻辑等价的主析取范式；若 $A$ 为矛盾式，其主析取范式为空范式（不含任何极小项）。

唯一性：若 $A$ 为非矛盾式，则与 $A$ 逻辑等价的主析取范式唯一；若 $A$ 为矛盾式，其主析取范式为唯一的空范式。

根据主析取范式与主合取范式的对偶性，主合取范式的存在唯一性定理可通过对偶性直接推导。

### 2.3.3 范式理论的应用

合取范式、析取范式、主析取 、主合取范式的构造是范式理论的重要内容。利用主范式判定公式真值、公式类型和证明公式等价是范式的三大核心应用。

**1）主范式法判定命题公式真值**

主范式法、真值表法、等值演算法是命题公式真值判定的核心方法，主范式法是变元较多时更高效的判定方法。主范式法通过构造主范式编码，可判定所有赋值的真值（PDNF 匹配真，PCNF 匹配假）并且其结果唯一。可精准判定公式的真 / 假赋值集合，对比命题公式的等价性。

**定理 3.7：**主范式与真值赋值的对应定理

设公式 $A$ 含 $n$ 个命题变项，$A$ 的主析取范式有 $s$ 个极小项（$0\leq s\leq 2^n$），则 $A$ 有 $s$ 个成真赋值，它们是极小项下标的二进制表示（变元顺序固定），其余 $2^n-s$ 个赋值都是成假赋值。

例如公式 $A$: $p\rightarrow(q\wedge r)$

$p\rightarrow(q\wedge r)\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_7=\sum m_{0,1,2,3,7}$

$p\rightarrow(q\wedge r)\Leftrightarrow M_4\wedge M_5\wedge M_6=\prod M_{4,5,6}$

成真赋值: 000,001,010,011,111

成假赋值: 100,101,110

**2）主范式法判定命题公式类型**

**定理 3.8：**主范式判定命题公式类型定理

设公式 $A$ 含 $n$ 个命题变项，则：

$A$ 为重言式（永真式）当且仅当 $A$ 的主析取范式包含 $2^n$ 个极小项（全部极小项）；

$A$ 为矛盾式（永假式）当且仅当 $A$ 的主析取范式不含任何极小项（简记为 0）；

$A$ 为可满足式当且仅当 $A$ 的主析取范式中至少含一个极小项（重言式是特殊情况）。

**例 3.14**：用主析取范式判断公式的类型

(1) 公式 $A\Leftrightarrow(p\wedge q)\wedge\neg(p\vee q)$

(2) 公式 $B\Leftrightarrow(p\to q)\vee(q\to p)$

(3) 公式 $C\Leftrightarrow p\wedge(q\to r)$

解(1)：$A\Leftrightarrow(p\wedge q)\wedge(\neg p\wedge\neg q)\Leftrightarrow(p\wedge\neg p)\wedge(q\wedge\neg q)\Leftrightarrow 0$

主析取范式无极小项，故 $A$ 为矛盾式。

解(2)：$B\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\vee(\neg q\vee p)\Leftrightarrow(\neg p\vee p)\vee(\neg q\vee q)\Leftrightarrow 1\vee 1\Leftrightarrow 1$

$B$ 含 2 个变项，等价于 $m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3$，含全部 $2^2=4$ 个极小项），故 B 为重言式。

解(3)：$C\Leftrightarrow p\wedge(\neg q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge r)\Leftrightarrow m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

$C$ 含 3 个变项，4 个极小项，故 $C$ 为非重言的可满足式。

结论：(1) 矛盾式；(2) 重言式；(3) 非重言的可满足式。

**3）主范式法判定命题公式逻辑等价**

利用主范式判定命题公式逻辑等价是等值演算法和真值表法的重要补充，适应变项较多、公式复杂的命题公式判定。主范式法依托主范式存在唯一性定理，将抽象的逻辑等价判定转化为具体的范式同一性验证。

**例 3.15**：判断公式 $p$ 与 $(\neg p\vee q)\to(p\wedge q)$ 是否逻辑等值。

解：分别求两个公式的主析取范式，若主析取范式相同，则公式等值。

求 p 的主析取范式：

$p\Leftrightarrow p\wedge(\neg q\vee q)$ (排中律)

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$ (分配律)

$\Leftrightarrow m_2\vee m_3$ （$p\wedge\neg q$ 对应赋值 10 , 即极小项 $m_2$，$p\wedge q$ 对应赋值 11, 即极小项 $m_3$ ）

求 $(\neg p\vee q)\to(p\wedge q)$ 的主析取范式：

$(\neg p\vee q)\to(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\vee(p\wedge q)$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow m_2\vee m_3$ （同上 ）

结论：两个公式的主析取范式完全相同，故 $p\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\to(p\wedge q)$。

**例 3.16**：利用主析取范式求解人员选派问题

要从 A、B、C 三人中选派若干人组成研究小组，需满足下述条件：

(1) 若 A 参加，则 C 必须参加；

(2) 若 B 参加，则 C 不能参加；

(3) A 和 B 必须参加一人且只能参加一人。

问有几种可能的选派方案？

解：

命题符号化：记 $p$：派 A 参加，$q$：B 参加，$r$：派 C 参加。

条件转化为命题公式：(1) $p\to r$；(2) $q\to\neg r$；(3) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$。

构造总命题公式：$D=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$

求公式 A 的所有成真赋值：每个成真赋值对应一种合法选派方案

$D\Leftrightarrow(\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg r))\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$ （分配律）

$\Leftrightarrow((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q)\vee 0)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q))\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$ （同一律）

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\wedge(p\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q)$

$\vee(\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q)\vee(\neg \mathrm{p}\wedge\neg \mathrm{r})\wedge(\neg \mathrm{p}\wedge \mathrm{q})\vee(\mathrm{r}\wedge\neg \mathrm{q})\wedge(\neg \mathrm{p}\wedge \mathrm{q})$ （分配律）

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge p)\wedge(\neg q\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge p)\wedge(\neg r\wedge\neg q)\vee(r\wedge p)\wedge(\neg q\wedge\neg q)$

$\vee(\neg p\wedge\neg p)\wedge(\neg q\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg p)\wedge(\neg r\wedge q)\vee(r\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q)$ （归并合取项变元）

$\Leftrightarrow 0\vee 0\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee 0\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee 0$ （矛盾律，幂等律）

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$ （同一律，消去 0，得到主析取范式）

成真赋值:（按 $p$、$q$、$r$ 顺序，1 表示去，0 表示不去）

$p\wedge\neg q\wedge r$ 对应赋值 101，$\neg p\wedge q\wedge\neg r$ 对应赋值 010

选派方案：

方案 1：赋值 101 → 选派 $A$、$C$，不选派 $B$；

方案 2：赋值 010 → 选派 $B$，不选派 $A$、$C$。

**4）主范式辅助芯片设计**

在集成电路设计中，所有组合逻辑设计、验证、优化都建立在主范式的原理之上。将不同形式的逻辑描述，统一为主范式标准形式，实现各设计环节间的无歧义衔接。将所有逻辑等价性判断问题统一为主范式的对比问题，成为仿真、验证和等价性检查的客观标准。将所有组合逻辑的化简方法统一为最小项 / 最大项的合并消元。

**例 3.17：**一盏灯由 2 个开关控制，按动任何一个开关都能实现灯的开 / 关切换，试设计该控制线路。

解：设两个开关的状态为命题变元为 $x,y$，开关闭合为 1、断开为 0。灯的状态逻辑函数 $F$：灯亮为 1、灯灭为 0。初始状态为 $x=0, y=0$， $F=1$。

根据 “按动任一开关，灯的状态翻转” 的规则，列出所有输入组合对应的输出：

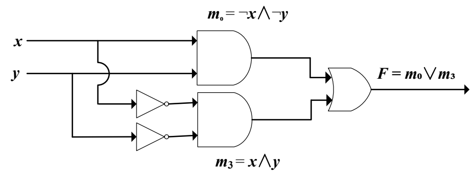
| $x$ | $y$ | $F$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$F=1$ 的成真赋值为(0,0)、(1,1)，则主析取范式 $F=m_0\vee m_3$

展开最小项（变元为 1 取原变量，为 0 取反变量）：$F=(\neg x\wedge\neg y)\vee(x\wedge y)$

与门（AND）、或门（OR）、非门（NOT）是集成电路（IC）设计的基础，任何复杂的数字逻辑功能都可以通过它们的组合实现。它们是实现主范式的直接硬件载体，而主范式是这些门电路在数学上的标准表达形式。与门用于生成极小项，或门用于合成极小项；或门用于生成极大项，与门用于合成极大项。

针对主主析取范式 $F=m_0\vee m_3$，选择 2 个非门产生¬$x$ 和¬$y$，选择 2 个与门生成 2 个极小项，选择 1 和或门合成 2 个极小项得到 $F$ 对应的结果电路。




## 习题

定理 3.1 中如何由连接词完备集（3）得到连接词完备集（6）的理由和证明过程是什么？

## 知识扩展提示词

如何由一元真值函数、二元真值函数到 $n$ 元真值函数？

$n$ 元真值函数的映射规则如何确定？

比较真值表法、等值演算法和主范式法在命题逻辑中真值判定中的区别？

真值函数 f 与命题公式、定义域、值域、映射等元素的关系？

## 第 3 章主要数学符号列表

| 序号 | 符号 | 名称 | 含义 |
|---|---|---|---|
| 1 | ¬ | 否定联结词 | $\neg p$,命题 $p$ 的否定式 |
| 2 | ∧ | 合取联结词 | p∧q,命题 p 与 q 的合取式 |
| 3 | ∨ | 析取联结词 | p∨q,命题 p 与 q 的析取 |
| 4 | → | 命题蕴含联结词 | $p\rightarrow q$,命题 p 与 q 的蕴含式 |
| 5 | ↔ | 命题双向等价联结词，用于构成命题公式 | $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg Q\rightarrow\neg P)$（完整的等价命题公式，用于真值表演算或命题推理） |
| 6 | ⇔ | 命题双向等价联结词，用于命题等价的断言 | $(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow(\neg Q\rightarrow\neg P)$（断言两个命题公式等价,用于证明过程中的等价推导） |
| 7 | ⇒ | 逻辑推出 | $P\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow Q$,由 $P$ 且 $P$ 蕴涵 $Q$，可推出 $Q$ |
| 8 | ⇎ | 不等值(价) 联结词 | $A\not\Leftrightarrow B$, $A$ 与 $B$ 是不等值式 |
| 9 | ⊕ | 派生联结词异或 XOR | $p\oplus q$, $p$ 和 $q$ 一真一假时结果为真；同真同假时结果为假 |
| 10 | ↑ | 派生联结词与非 NAND | $p$ 和 $q$ 只要有一个假，$p\uparrow q$ 就真；$p$ 和 $q$ 全为真，$p\uparrow q$ 为假。 |
| 11 | ↓ | 派生联结词或非 NOR | $p$ 和 $q$ 只要有一个真，$p\downarrow q$ 就假；$p$ 和 $q$ 全全为假，$p\downarrow q$ 才真。 |