目录

第 2 章 数学证明方法

证明是一种确立真理的方法。一个命题的数学证明是一条逻辑演绎链，从一组基本公理推导出这个命题。证明框架中命题、逻辑演绎和公理是三个核心要素。公理是推理的起点，命题是推理的目标，逻辑演绎是连接起点与目标的路径。

按逻辑路径可将数学证明方法分为直接证明法、间接证明法和独立证明法。直接证明法从条件、公理出发直接推导结论。间接证明法通过否定结论推导矛盾来佐证原命题。独立证明法是基于特定公理体系的递推证明，核心是归纳证明类。

2.1 命题形式

2.1.1 命题

定义 2.1：命题是具有唯一确定真值的陈述句，其真值仅为真（True/1）或假（False/0），不存在其他可能。

命题的真值（Truth Value）为真（True/1）时，表示命题所陈述的内容符合客观事实或公理、定理的推导结果，例如命题‘2 + 3 = 5’的真值为真。命题的真值为假（False/0）时，表示命题所陈述的内容与事实或逻辑推导相悖，例如命题‘1 + 1 = 3’的真值为假。

命题是知识表达和传递必须依托的语句，是形式逻辑的基本推理单位，是连接语言符号与客观现实的中介。

从语法规范的角度，命题通常由陈述句表达，疑问句、祈使句、感叹句一般不表达命题。构成命题的陈述句需能独立表达一个完整的语义，且真值可唯一判定（不依赖语境或主观解读）。例如‘正在下雨’虽语法完整，但真值依赖‘时间、地点’等语境，无法唯一确定，因此不构成命题。‘静止的车流在前进’构成矛盾组合，不具备真值的可判定性，也不构成命题。例如“这句话是假的”是悖论句，其真值无法确定，不属于有效命题。

构成命题的陈述句必须能够被判断为“真”或“假”，这是其作为命题载体的核心条件。例如“地球是圆的”，可以通过科学观测验证其真值。应避免将仅表达主观价值判断、个人偏好或抽象感受的陈述句视为命题。这类语句无客观公认的真假判定依据（如科学验证、公理推导、事实观察等）。例如‘地铁环线的设计比直线线路更美观’‘上海的秋天比西安的秋天更舒适’等，其判断标准完全依赖个人主观认知，无法统一判定‘真’或‘假’，因此不属于有效命题。

2.1.2 典型命题表述范式

典型命题表述范式是数学与应用领域中具有共性逻辑结构的实际命题进行抽象归纳的结果，不同范式对应着不同类型的实际命题场景。这些实际命题具有明确的真值和逻辑结构，归纳为典型范式可方便适配规范化的证明方法，实现了命题真伪的严谨验证，将实际问题转化为形式化模型，达成“验证真伪、训练思维、衔接应用”的核心目的。

1） 条件命题：if *A*, then *B*（若 *A*，则 *B*）

条件命题属于假言命题的重要类型，是形式逻辑中核心的复合命题之一。由两个简单命题通过‘if…then…’连接词组合而成，前件 *A* 代表条件、是假设的部分，后件 *B* 代表由条件推导出来的结果、结论的部分。连接词在自然语言中还可替换为‘如果… 那么…’、‘只要…就…’、‘倘若… 则…’等，且前件与后件的逻辑关系仅依赖二者的真值组合，与内容本身无关。

条件命题的真值不取决于 *A* 和 *B* 各自的独立真值，而是取决于‘前件 *A*’与‘后件 *B*’之间的逻辑推导关系，其逻辑真值表如下：

A	***B***	**If *A*, then *B***
真	真	真
真	假	假
假	真	真
假	假	真

只有当前件 *A* 为真、后件 *B* 为假时，整个假言命题才为假。

在数理逻辑体系中，命题‘if *A*, then *B*’的形式化符号表达为 $A\to B$（其中‘→’为蕴含联结词），也可通用表示为 $p\to q$（p 对应前件 *A*，q 对应后件 *B*），*A*、*B* 是 p、q 的具体实例（如 *A* 为‘明天天气好’，*B* 为‘我们去打球’，则命题可表示为 $p\to q$）。

2）充分必要条件假言命题：*A* if and only if *B*

该命题在逻辑学中通常记作 $A\leftrightarrow B$（读作‘*A* 等价于 *B*’），属于假言命题的特殊类型。命题可拆分为两个方向的普通假言命题，且二者必须同时成立：充分性（$A\to B$），即‘如果 *A* 成立，那么 *B* 成立’（*A* 是 *B* 的充分条件）；必要性（$B\to A$），即‘如果 *B* 成立，那么 *A* 成立’（*A* 是 *B* 的必要条件）。

充分必要条件命题的真值核心是‘前件与后件真值完全同步’，其逻辑真值表如下：

A	***B***	***A* if and only if *B***
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	真

当且仅当 ***A*** 与 *B* 的真值完全相同时（同真或同假），整个充分必要条件命题为真。

2.2 直接证明法

直接证明法是从命题的前提条件、已知公理、已证定理出发，通过符合逻辑规则的正向推导直接得出结论的证明方法，不是通过‘假设结论不成立→导出矛盾’的间接路径。每一步推导都必须基于公认的逻辑规则、公理体系或已被严格证明的定理，确保推导过程无逻辑漏洞。

定义 2.2: 直接证明法

直接证明法是指：针对条件命题 $P\to Q$，假定前提 P 为真，通过运用公理、已证定理、定义及逻辑推理规则进行一系列正向推导，直接得出结论 Q 为真的演绎证明方法。

例 2.1: 如果 n 是奇数，那么 n^2 也是奇数。

证：假设 n 是奇数，那么存在 $k\in\mathbb{N}$，使得 $n=2k+1$。

计算 $n^2=(2k+1)^2=2(2k^2+2k)+1$。

由于 $2k^2+2k$ 是整数，因此 $2\,(2k^2+2k)$ 是偶数，偶数加 1 为奇数，故 n^2 是奇数。

2.2.1 穷举证明方法

穷举法又称枚举法，是通过‘完全遍历’将有限且可明确界定的解空间全部列出，再依据约束条件逐一检验，满足条件的即为有效解，不满足的则排除。该方法的关键前提是解空间有限且可明确界定，若解的数量无限或无法完整列举，穷举法不适用。例如，要证明“小于 6 的正整数中，质数为 2、3、5”，只需枚举 1-5 并验证即可。

穷举法的基本步骤：①界定解空间（明确所有可能的候选解范围）；②设定验证规则（明确判定候选解是否有效的标准）；③逐一枚举验证（按顺序遍历候选解，对照规则检验）；④输出有效解（汇总所有满足条件的候选解）。其应用场景包括数论中的质数判定、组合数学中的排列组合列举、算法设计中的暴力搜索、测试用例的全覆盖设计、哈希表的碰撞检测等。需注意，解空间规模过大会出现组合爆炸，导致计算效率极低甚至无法完成求解。

2.2.2 分情况证明法

分情况证明法（也称分类讨论法）是穷举法的扩展形式，适用于包含无限情况的命题。该方法将原问题分解为若干个更小的、互斥且覆盖所有可能的子问题，对每个子问题分别进行证明，最终整合所有子问题的结论得到原命题的证明。

该方法适用于问题本身可通过逻辑划分转化为互斥且穷尽的子类（如基于命题条件的取值范围、属性特征等自然分类），或通过逻辑划分简化问题解决的场景。分类需满足两个核心准则：①互斥性（不同子类无重叠）；②穷尽性（所有可能情况均被覆盖）。对每个子类直接推导结论成立，即可整合得到原命题成立。例如，要证明命题“对任意实数 x，$x^2\geq0$”，则可将其划分为 $x>0$、$x=0$、$x<0$ 三类来讨论。

分情况证明法的逻辑化表达

对于前件析取式、连接词为蕴含式的命题，其逻辑化表达如下：

待证明的命题形式为：$A=(A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_k)\to B$（$A_1$至 A_k为互斥且穷尽的子情况）。

分情况证明方法：分别证明 $A_1\to B$、$A_2\to B$、…、$A_k\to B$ 均为真，则原命题成立。

例 2.2: 证明 $\max(a, \max(b,c))=\max(\max(a,b),c)$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, $\max(x,y)$的取值是 x,y 中的最大值。

证：

证：该证明是验证最大值运算的结合律，需穷举 a,b,c 所有可能的大小排序情况。3 个实数的全排列共 6 种，恰好覆盖了全部情况，对每种情况都验证了等式两边的计算结果相等，也就证明了等式的最终结果成立。

Cases	$u=\max(b,c)$	$\max(a,u)$	$v=\max(a,b)$	$\max(v,c)$
$a\leq b\leq c$	c	c	b	c
$a\leq c\leq b$	b	b	b	b

b ≤ ***a*** ≤ ***c***	c	c	a	c
b ≤ ***c*** ≤ ***a***	c	a	a	a
c ≤ ***a*** ≤ ***b***	b	b	b	b
c ≤ ***b*** ≤ ***a***	b	a	a	a

2.2.3 构造性证明

构造性证明法直接从命题的前提条件出发，正向建立前提与结论的逻辑关联，通过构造出满足结论的具体对象或实例来直接推导结论成立。

定义 2.3: 构造性证明是直接证明法的一种，通过构造满足结论的实例、算法或结构，直接建立前提与结论的逻辑联系，从而证明命题成立。它不仅回答“是否存在”，还回答“如何构造”。

例如：要证明命题“存在两个无理数 a,b，使得 ab 为有理数”，可构造 $a=2,b=2$ 并验证。

1）构造性证明法的核心操作

构造性证明方法的逻辑链是“前提→构造→验证”，是在 A 为真的条件（前提）下，构造一个具有此属性的对象（验证）。

例 2.3: 证明命题“对于每一个正整数 n，都存在 n 个连续的正合数”。

证：设 $x=(n+1)!$

（1）构造辅助正整数 $x=(n+1)!$

任意给定的正整数 n，需要构造辅助正整数 x，使得 n 个连续正整数 $S=\{x+2, x+3, \ldots, x+(n+1)\}$中的任意一个元素 $x+i$（$i\in\{2,3,\ldots,n+1\}$）都存在一个 $x+i$ 的真因数 d ($1<d<x+i$)，使得 d 能整除 $x+i$，即满足合数的定义。

S 中的每个元素都可以统一表示为 $x+i$，其中 i 的取值恰好是 $\{2,3,\ldots,n+1\}$。S 的每一个元素都有自己的专属偏移量 i，如果构造的 x 是 i 的倍数，就能保证 i 能整除这个元素，即 $i\mid(x+i)$。

对所有 $i\in\{2,3,\ldots,n+1\}$，要构造满足 $i\mid x$ 的 x，也就是让 x 成为 $2,3,\ldots,n+1$ 的任意正公倍数。满足条件的 x 有无数种选择，最优简洁方案是设 $x=(n+1)!$。

当取 x 为 $(n+1)$ 的阶乘，即 $x=(n+1)!=1\times2\times3\times\cdots\times(n+1)$时，$2,3,\ldots,n+1$ 都是 $(n+1)!$ 的因子，因此对任意 $i\in\{2,3,\ldots,n+1\}$，都有 $i\mid(n+1)!$。

（2）验证存在 n 个连续的正合数

验证的核心是证明序列 $S=\{x+2, x+3,\ldots, x+(n+1)\}$ 中每个元素都是合数。取 S 中任意元素 $m=x+i$，其中 $i\in\{2,3,\ldots,n+1\}$，证明 $i\mid m$。

①根据整除的基本性质：若 $a\mid b$ 且 $a\mid c$，则 $a\mid(b+c)$。

②根据阶乘定义有 $i\mid x$，也有 $i\mid i$， 因此 $i\mid(x+i)$，即 $i\mid m$。

③i 的取值范围决定了 $i>1$; $m=x+i=(n+1)!+i$，而 $(n+1)!\geq2!=2>0$，因此 $m>0+i=i$ 成立。

④m 是大于 1 的正整数，且存在真因数 i 使得 $i\mid m$，因此 m 是合数。

（3）结论：对于任意一个正整数 n，都存在由 n 个连续正整数构成的集合，且这个集合中的每一个元素都是合数，命题成立。

2）构造性证明与非构造性证明

存在性证明通常可分为构造性证明与非构造性证明两类。构造性证明通过显式构造给出满足命题条件的具体对象，因此不仅证明对象存在，而且提供了获得该对象的方法；而非构造性证明则不直接给出具体实例，而是借助反证法、排中律等逻辑推理手段，证明所需对象必然存在。

一般而言，构造性证明更强调对象的可构造性或可计算性（在算法设计等场景中尤为重要），而非构造性证明则侧重于从理论层面确立存在性结论。两类方法各有优势、相互补充：当显式构造满足条件的实例较为困难时，非构造性证明仍能够有效地确认相关对象或命题的存在性，从而在复杂数学问题的研究中发挥重要作用。

2.3 基于命题真值的直接判定方法

该类证明方法是数理逻辑中特殊的非构造性证明方法，无需通过逻辑推导链条由前提推导出结论，而是直接依据蕴含式 $P\to Q$ 的真值表规则，通过判定前件 P 或后件 Q 的固有真值属性，确定整个蕴含式的真假。方法的核心是判定 P 或 Q 的固有真值属性，直接应用真值规则得出结论。

2.3.1 空证明

空证明法是数理逻辑中一种特殊的非构造性证明方法，其逻辑根基是空真（Vacuous Truth）这一数理逻辑基本规则。空真描述的是‘无反例即真’的特殊逻辑状态， 当全称命题的论域为空集，或条件命题的前提（前件 P）无法满足（永假）时，命题本身自动为真。空证明法正是基于这一原理，针对形如 $P\to Q$ 的蕴含命题，当前提 P 恒为假时，直接依据蕴含式的真值规则（假前提推出任何结论均为真），判定命题恒为真。

定义 2.4: 空证明法是指：针对形如 $P\to Q$ 的蕴含命题，当前提 P 恒为假时，直接依据蕴含式的真值规则（假前提推出任何结论均为真），判定命题恒为真。

条件命题 $P\to Q$ 的真值表是空证明法的严格逻辑基础：

P 的真值	Q 的真值	$P\to Q$ 的真值
真	真	真
真	假	假
假	真	真
假	假	真

条件命题 $P\to Q$ 的真值表是空证明法的严格逻辑基础。

例 2.4: 证明命题‘若 x 是大于 2 的质数且为偶数，则 $x>10$’。

证：该命题为蕴含式 $P\to Q$，其中 P：x 是大于 2 的质数且为偶数，Q：$x>10$。

①分析前件 P 的矛盾性：质数是大于 1、仅能被 1 和自身整除的数；

②偶数是能被 2 整除的自然数。若 $x>2$ 且为偶数，则 $x=2k$（$k\in\mathbb{N}$），此时 x 至少有因数 1、2、k，不满足质数定义，即没有任何自然数 x 满足 P，故 P 是矛盾式（恒假）。

③根据空证明法规则，无论 Q 是真是假，$P\to Q$ 恒为真，因此原命题成立。

空证明法不能证明蕴含式 $P\to Q$ 的所有真值情况，它只适用于蕴含式真值判定中的一种特定场景，也就是 P 为恒假命题时，命题 $P\to Q$ 为真的情况。蕴含式 $P\to Q$ 恒为真并不代表命题

的前件 P 或后件 Q 有实际应用价值。从实际意义的角度，命题 $P\to Q$ 成立（为真），等价于不存在任何满足 P 但不满足 Q 的例子，既然没有任何反例能推翻这个命题，那么在实际意义上，这个命题就是成立的。

我们平时说一个 “若⋯ 则⋯” 的句子为真，默认前提是 “前提有可能成立”，再看结论是否合理。这种直觉理解使得我们对该示例的结论有种 “相悖感” ，原因是把 “命题逻辑上为真” 和 “命题有实际意义” 混谈了。认为命题的前件 P 在现实中根本不可能发生，$P\to Q$ 为什么还为真，不管我们把 Q 换成 $x<10$ 或其它，$P\to Q$ 都会为真，这就是数理逻辑的“绝对”思维。

在经典命题逻辑中，蕴含命题$P\to Q$为假仅存在一种情形，也就是P为真而Q为假。因此，只要不存在这样的反例，命题$P\to Q$即为真。例如，命题“如果我是外星人，那么我就能飞”在经典逻辑下为真。这并不是因为该命题在经验上可信，而是因为其前件“我是外星人”为假，从而不存在前件为真而后件为假的情形。这种情形称为真空真（vacuous truth）。

例 2.5: 设 $n\in\mathbb{N}$，定义命题函数 $P(n)$: 若 $n>1$，则 $n^2>1$. 试证明 P(0)为真命题.

证：将 n=0 代入命题函数 $P(n)$，得到 P(0) 的具体形式：P(0):若 0>1, 则 $0^2>1$

该蕴含式的前件 0>1 永远不成立（恒假），根据空证明法得知 $P(0)$ 是真的。

2.3.2 平凡证明

平凡证明（Trivial Proof） 是数理逻辑中一种特殊的非构造性证明方法，其逻辑根基是平凡真（Trivial Truth） 这一数理逻辑基本规则。平凡真描述的是一种 “结论恒真则命题为真” 的特殊逻辑状态，当一个条件命题的后件（结论）在任何情况下都为真，无论前件（条件）的真假如何，这个条件命题本身自动为真。平凡证明法是基于这个原理衍生出的一种具体证明方法。

定义 2.5：平凡证明法针对形如 $P\to Q$ 的蕴含命题，当后件 Q 恒为真时，依据蕴含式的真值规则，无论前件 P 真假，整个蕴含式都为真。

使用平凡证明法证明蕴含命题 $P\to Q$ 的主要步骤如下：①拆分待证命题，确定其前件 P 和后件 Q，将命题整理为标准的蕴含式形式 $P\to Q$。②通过公理、定义、恒等式推导或论域内的逻辑分析，证明在命题的论域内后件 Q 是恒真命题。③根据蕴含式的真值规则 —只要后件 Q 恒真，无论前件 P 的真假，蕴含式 $P\to Q$ 恒为真，直接得出 $P\to Q$ 是真命题的结论。

例 2.6: 证明：若 $a\le b$, 则 $a^0\le b^0$

证：设命题 P：$a\le b$ 和 ，命题 Q：$a^0\le b^0$，需证蕴含式 $P\to Q$ 为真。

对于任意非零实数 a,b，由零指数幂定义有 $a^0=1$，$b^0=1\Longrightarrow a^0\leqslant b^0$

即结论 Q 恒为真，与前提 P 是否成立无关。

根据平凡证明法（当结论 Q 恒真时，$P\to Q$ 必为真），故命题 “若 $a\le b$, 则 $a^0\le b^0$” 为真命题。

2.4 间接证明法

间接证明法、直接证明法以及基于真值的判定法在推理思路、理论依据与适用场景上存在明显区别。直接证明法从已知条件出发，依据公理、定义与定理进行正向演绎推理，直接推导出结论，适用范围广泛，是各类数学与逻辑证明的基础方法。基于真值的判定法无需形式化演绎，仅通过枚举命题变元的所有真值组合来验证命题是否为真，适用于命题变元数量有限的命

题逻辑公式。间接证明法不直接推导原命题，而是通过证明其等价命题成立，或由否定结论推出矛盾从而完成证明，适用于直接证明难度较大、结论带有否定性或存在性特征的命题，反证法是其最具代表性的方法。

定义 2.6: 间接证明法是一类广义的迂回论证方法，涵盖所有不直接从前提推导结论的证明形式，其核心是借助逻辑等价命题的真实性，或通过否定结论导出矛盾来判定命题是否成立。

定义 2.7:逻辑事实（Logical Fact）：在给定的逻辑系统中，其真值由系统的语法规则（公理 + 推理规则）或语义规则必然赋予，仅与命题的逻辑形式相关、不依赖具体经验内容和现实对象的形式化命题（合式公式）。

例如“一个命题及其逆否命题在逻辑上是等价的”就是一个逻辑事实，与命题的现实经验事实无关。经验事实（Empirical fact）是客观世界的观察、实验、经验归纳，其真值可能随条件变化。比如 “如果所有的鸟都会飞，那么乌鸦会飞” 是一个逻辑事实。 它的成立源于 “全称命题蕴含单称命题” 的逻辑规则，而与 “乌鸦是否真的会飞” 这一经验事实无关。间接证明法的 “迂回论证” 路径，完全依赖逻辑事实的普遍必然性和不可违背性来保障推理的合法性与有效性。

2.4.1 反证法

反证法（归谬法）是间接证明法的核心子类。该证明方法按照“否定结论→导出矛盾→肯定结论”的逻辑路径，通过矛盾的不可存在性反向确立原命题的真实性。适用于包括蕴含式命题、性质命题在内的所有类型的命题，尤其适合直接推导困难的否定式、唯一性、无限性命题。

定义 2.8: 反证法首先假设要证明的命题 Q 的否定$\neg Q$ 为真，然后通过逻辑推理导出一个矛盾或不可能的结果。

反证法首先在承认前提 P 为真的前提下，假设结论 Q 的否定 $\neg Q$ 成立，然后通过公理、定理及已知条件进行严格逻辑推理，最终导出符合矛盾律的逻辑矛盾（$R\wedge\neg R$），进而否定 “$P\wedge\neg Q$” 的前提假设，结合排中律判定原命题 $P\to Q$ 为真。

例 2.7: 设 A,B 为任意两个集合，证明：若 $A-B=A$，则 $A\cap B=\varnothing$。

证：反正法

①明确已知条件 $A-B=A$ 和待证结论 $A\cap B=\varnothing$；

②假设待证结论的否定成立，即 $A\cap B\neq\varnothing$，由集合交集定义，则存在 $x\in A\cap B$；

③逻辑推导：

由交集的定义：$x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B$

由已知条件 $A-B=A$ 及 $x\in A$ 可得 $x\in A-B$。

由差集的定义：$x\in A-B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$

由假设得到事实 $x\in A\cap B$，即 $x\in A\wedge x\in B$

合并上面两个已知真命题，则有 $(x\in A\wedge x\notin B)\wedge x\in B$

对合取式化简: $x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\in B)$恒为假

④导出矛盾：$x\notin B\wedge x\in B$ 违背了矛盾律($\neg(P\wedge\neg P)$为恒真式)，即一个元素不能同时属于某个集合又不属于该集合。

⑤否定假设，得出结论：产生矛盾的结果说明初始假设 $A\cap B\neq\varnothing$ 不成立，因此原命题的结论必然成立。

综上，命题得证。

例 2.8: 证明命题：设 n 为整数，若 n^2 是奇数，则 n 是奇数。

证：用反证法，只要证得:若 n 是偶数, 则 n^2 也是偶数，即证得原命题为真。

假设原命题结论的否定成立：即 n 是偶数。

偶数 n 必存在整数 k，使得 $n=2k$。

有 $n^2=(2k)^2=4k^2=2\cdot(2k^2)$，因为 k 是整数，所以 $2k^2$ 也是整数。根据偶数的定义 n^2 是偶数。

在假设 n 是偶数的条件下，推导得出的 "n^2 是偶数"与已知条件为 "n^2 是奇数" 矛盾（违背个数不能既是奇数又是偶数的矛盾律）。说明初始假设 "n 是偶数" 不成立，因此 n 必为奇数。

综上，原命题得证。

例 2.9: 证明命题：$\sqrt{2}$是无理数。

该命题是一个简单的性质命题（也叫直言命题）没有 "条件 - 结论" 的推导关系，直接断言$\sqrt{2}$属于无理数的范畴。

证：用反证法

假设$\sqrt{2}$是有理数，根据有理数的定义，存在互质的正整数 p 和 q，使得$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$

对等式两边平方，得 $2=\frac{p^2}{q^2}\Longrightarrow p^2=2q^2$

由此可知 p^2 是偶数，进而推出 p 是偶数（若奇数的平方必为奇数）。

设 $p=2k$（k 为正整数），代入上式得$(2k)^2=2q^2\Longrightarrow 4k^2=2q^2\Longrightarrow q^2=2k^2$

可得 q^2 是偶数，因此 q 也是偶数。

推导结论 p 和 q 均为偶数说明 p 和 q 有公因数 2，这与 p 和 q 互质的条件矛盾。矛盾表明初始假设不成立，故 $\sqrt{2}$ 是无理数。

2.4.2 逆否命题证明

逆否命题证明是间接证明法的核心子类。该证明方法按照 "写出逆否命题→证明逆否命题成立→等价传递原命题成立" 的逻辑路径，通过蕴含式命题与其逆否命题的等价性正向确立原命题的真实性。仅适用于蕴含式命题 $P\to Q$，尤其适合原命题直接推导复杂、而逆否命题条件与结论关联更清晰的命题。

蕴含式命题 $P\to Q$ 的逻辑含义为 "若 P 成立，则 Q 成立"。其逆否命题$\neg Q\to\neg P$ 的逻辑含义是 "若 Q 不成立，则 P 不成立"）。蕴含式命题 $P\to Q$ 与其逆否命题 $\neg Q\to\neg P$ 是逻辑等价的，即二者的真值完全相同 。

定义 2.9: 逆否命题证明法首先写出蕴含式命题 $P\to Q$ 的逆否命题 $\neg Q\to\neg P$，然后通过逻辑推理证明该逆否命题成立。

例 2.10: 证明命题：设 n 为整数，若 n^2 是奇数，则 n 是奇数。

证：用逆否命题证明

①确定原命题结构：原命题 $P\to Q$ 中，P：n^2 是奇数，Q：n 是奇数。

②写逆否命题：逆否命题 $\neg Q\to\neg P$，若 n 是偶数，则 n^2 是偶数。

③证逆否命题：若 n 是偶数，则 $n=2k$（$k\in\mathbb{Z}$），$n^2=(2k)^2=2(2k^2)$，故 n^2 是偶数。

④等价传递原命题结论：由 $P\to Q\Leftrightarrow\neg Q\to\neg P$ 得知原命题成立。

2.4.2 举反例证明

举反例法属于间接证明法的子类，是一种直接证伪法，目的在于证明命题为假。它主要针对全称命题，只需找到一个不满足命题条件的具体特例，就能直接否定原命题的真实性，无需借助中间环节或矛盾推导。其证明思路为锁定全称命题、构造反例对象并验证反例属性，适用于全称肯定命题与全称否定命题的证伪，尤其适合正面验证难度较大、仅需一个特例即可推翻的概括性命题。

定义 2.10: 举反例法通过找到至少一个实例来反驳一个全称性质的命题，依据实例的属性与原命题的断言的矛盾证明原全称性质命题不成立。

全称性质命题的结构由全称量词、主项集合和性质断言三部分构成，是对某一集合内的全部元素做出统一的属性判定。全称量词用来表示 “某个范围内的全部对象”，常见的自然语言表述：所有、任意、每一个、一切。主项集合是全称量词限定范围内，需要判定的的全体对象。性质断言是对主项集合中每一个元素的属性或关系的判定（肯定/否定），例如命题“所有质数都是大于 1 的自然数” 中“是大于 1 的自然数” 是是肯定断言，命题 “一切偶数都不是奇数”中“不是奇数”是否定断言。

例 2.11: 证明命题：所有无约束优化问题的局部极小值点，都是全局极小值点。

命题结构：全称量词为“所有”，主项集合为“无约束优化问题的局部极小值点”，性质断言为“是全局极小值点”。

证： 举反例

①选一个简单函数 $f(x)=x^3-3x$ 求极值点。

求导得 $f'(x)=3x^2-3$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$ 和 $x=-1$。

二阶导数 $f''(x)=6x$， $f''(1)=6>0$，所以 $x=1$ 是局部极小值点，对应函数值 $f(1)=-2$。

②验证全局情况：当 x 趋向负无穷时，$f(x)=x^3-3x$ 也趋向负无穷，函数值能比 -2 更小。

③结论：$x=1$ 是局部极小值点，但不是全局极小值点，与原命题矛盾，因此原全称命题不成立。

2.5 数学归纳法

数学归纳法是是归纳型演绎证明法中用于无限集合命题的核心方法，其“归纳”，只是指从基例（个别）推导到全体自然数（一般）的形式特征，其本质是完全符合演绎逻辑的。数学归纳法主要的两种基本形式是第一数学归纳法（弱归纳法）和第二数学归纳法（强归纳法），其本质区别在于归纳假设的范围不同。 除了上述两种基本形式外，还有反向归纳法、跳跃归纳法等变体，但应用范围相对较窄。

2.5.1 第一数学归纳法（弱归纳法）

弱归纳法是数学归纳法的基础形式，又称普通数学归纳法或数学归纳法，适用于绝大多数线性递推类命题。

定义 2.11: 弱归纳法数学归纳法

设 $P(n)$ 是定义在自然数集上的命题，n_0 为固定自然数。若满足：

基例验证：命题 $P(n)$的基例 $P(n_0)$成立；

归纳假设：对任意整数 $k\geq n_0$，若单个自然数 k 满足 $P(k)$成立，则可推出 $P(k+1)$成立；

则命题 $P(n)$ 对所有自然数 $n\geq n_0$ 均成立。

若命题的 $n=k+1$ 项结论仅由 $n=k$ 项的结论推导而定，则适合用弱归纳法证明。例如平方数求和公式命题：$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $(n\geq 1)$，不等式命题：$2^n>n$ $(n\geq 1)$ 。

例 2.12: 证明命题 $P(n)$：$3^{2n}-1$能被 8 整除（$n\geq1$）。

证：使用弱归纳法（第一数学归纳法）

①基例验证（$n=1$）：当 $n=1$ 时，$3^{2\times1}-1=9-1=8$， 8 能被 8 整除，命题 $P(1)$成立。

②弱归纳假设：假设当 $n=k$（$k\geq1$，k 为正整数）时命题 $P(k)$成立，即 $3^{2k}-1$ 能被 8 整除。根据整除的定义，可设 $3^{2k}-1=8M$（其中 M 为正整数），即 $3^{2k}=8M+1$。

③归纳递推（证明 $n=k+1$ 时命题成立）：当 $n=k+1$ 时，需证明 $3^{2(k+1)}-1$ 能被 8 整除。

$3^{2(k+1)}-1=3^{2k+2}-1=3^{2k}\times3^2-1=9\times3^{2k}-1$，将归纳假设的 $3^{2k}=8M+1$ 代入上式：

$9\times3^{2k}-1=9\times(8M+1)-1=72M+9-1=72M+8=8\times(9M+1)$

M 、 $9M+1$ 都是正整数， $8\times(9M+1)$ 能被 8 整除，即 $n=k+1$ 时命题 $P(n)$成立。

④归纳结论：由弱归纳法原理，对所有正整数 $n\geq1$，命题 $3^{2n}-1$ 能被 8 整除成立。

对于相邻项递推型命题，弱归纳法比较适配。像命题 $P(n)$：任何大于等于 2 的整数 n 均可表成素数的乘积，用弱归纳法证明会比较繁琐。核心难点在于弱归纳法仅假设 $n=m$ 时 $P(m)$ 成立，而推导 $n=m+1$ 时，若 $m+1$ 是合数需要再分解，则单一的 $P(m)$ 假设无法覆盖这一需求。弱归纳法则需构造辅助命题 $Q(n)$（所有满足 $2\leqslant k\leqslant n$ 的整数 k 均可表为素数的乘积），证明 $Q(n)$ 成立后，才可通过取 $k=n$ 推出原命题 $P(n)$。

2.5.2 第二数学归纳法（强归纳法）

弱归纳法与强归纳法的核心区别在于归纳假设的范围不同，弱归纳法仅假设 $n=k$ 时命题成立，强归纳法则假设 $n_0\leqslant n\leqslant k$ 所有自然数对应的命题均成立。强归纳法被称为完全归纳法也是因为其归纳假设具备完全覆盖性，囊括了从基例 n_0 到 $n=k$ 的全部前置情况，无任何中间项遗漏。弱归纳法与强归纳法二者虽然证明能力完全相同，但在面对需要依赖前面多项或全部项结论的命题时，用强归纳法更为简洁。

定义 2.12：强归纳法

设 $P(n)$ 是定义在自然数集上的命题，n_0 为固定自然数。若满足：

基例验证：命题 $P(n)$ 的基例 $P(n_0)$ 成立；

归纳假设：对任意整数 $k\geqslant n_0$，若所有 $n_0\leqslant m\leqslant k$ 的自然数 m 都有 $P(m)$ 成立，则可推出 $P(k+1)$ 成立，则命题 $P(n)$对所有自然数 $n\geqslant n_0$ 均成立。

基例验证、归纳假设、归纳递推是强归纳法核心步骤，三个步骤环环相扣，共同构成完整的证明逻辑链。基例验证是证明的起点，归纳假设是证明的前提条件，归纳递推基于归纳假设，严格推导命题 $P(k+1)$成立。这一步是连接“有限”和“无限”的桥梁，通过逻辑演绎证明递推关系的必然性。

例 2.13: 证明命题 $P(n)$: 任何大于等于 2 的整数 n 均可表成素数的乘积。

证：用强归纳法

①基例验证（$n=2$）：当 $n=2$ 时，根据有限个素数乘积的广义定义，素数的分解式为其自身（1 个素数的乘积）。2 是素数，因此 $P(2)$成立。

②强归纳假设：假设对于所有满足 $2\le k\le m$ 的整数 k（$m\ge 2$），命题 $P(k)$ 都成立，即每一个介于 2 和 m 之间的整数，都可以表示为素数的乘积。

③归纳推导（证明 $P(m+1)$ 成立）：考虑整数 $m+1$ 的两种情况：

$m+1$ 是素数， $m+1$ 本身就是素数的乘积，$P(m+1)$ 成立；

$m+1$ 是合数，根据合数定义，$m+1$ 可分解成两个大于 1（最小为 2）且小于自身（最大为 m）的整数乘积，即 $m+1=a\times b$。当约定 $a\le b$（乘法交换律不影响分解）时，可得 $2\le a\le b\le m$。在强归纳假设下，$a,b\in[2,m]$ 均可表为素数乘积，因此 $m+1=a\times b$ 即为素数的乘积， $P(m+1)$ 成立。

④归纳结论：由强归纳法原理，对所有整数 $n\ge 2$，命题 $P(n)$成立。

例 2.14 证明命题 $P(n)$:任何不少于 12 分的邮费（$n\ge 12$）都可以用 4 分和 5 分的邮票组合支付。

证：用强归纳法

①基例验证：验证 $n=12,13,14,15$ 时命题成立，因为该命题的递推依赖 "减去 4 分" 的操作，需要覆盖从 n 到 $n-4$ 的跨度，确保递推链条无断裂。

$12=3\times 4$，$13=2\times 4+1\times 5$，$14=1\times 4+2\times 5$，$15=3\times 5$

因此 $P(12),P(13),P(14),P(15)$ 均成立。

②强归纳假设：假设对于所有满足 $12\le k\le m$（$m\ge 15$）的整数 k，命题 $P(k)$ 成立。

③归纳推导（证明 $P(m+1)$ 成立）： 由于 $m\ge 15$，则 $m+1\ge 16$，且 $(m+1)-4=m-3\ge 12$。

根据归纳假设，$m-3$ 满足 $12\le m-3\le m$，因此 $P(m-3)$ 成立，即 $m-3$ 分邮费可由 4 分和 5 分邮票组合支付。在 $m-3$ 分的组合基础上，增加 1 张 4 分邮票，即可得到 $(m-3)+4=m+1$ 分的组合。因此 $P(m+1)$ 成立。

④归纳结论：由强归纳法原理，对所有整数 $n\geqslant 12$，命题 $P(n)$成立。

强归纳法选定连续基例的个数等于递推步长，递推步长通常等于命题中给定的最小基本单元，因为递推的转化操作必然依赖最小单元的叠加。在邮票组合问题中，最小面值邮票的数值就是步长。在数列问题中，步长等于递推公式的阶数，如二阶递推数列 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ 的步长为 2。递推步长是强归纳法递推环节的 "核心跨度"，是连接 $P(m+1)$ 和更小自然数命题的桥梁，也是基例个数选择的唯一依据。

2.6 递归定义

递归定义是将复杂对象拆解为同结构的简单子对象，这种 “从小到大、从简到繁” 的构造逻辑，与证明方法的推理逻辑高度契合。数学归纳法的 “归纳基础 + 归纳递推” 结构与递归定义的 “基础情形 + 递推情形” 结构完全对应，是证明递归定义对象性质的标准方法。递归定义的构造逻辑，决定了证明方法的推理逻辑。

2.6.1 数列的递归定义

数列的递归定义是以初始项为起点，通过项间递推关系唯一确定数列的定义方法。按递推关系的阶数，递归定义的数列有 $n(n<=3)$阶递归数列和递推关系涉及三项及以上的高阶递归数列。根据递推关系中数列项的组合方式，则可分为线性递归数列和非线性递归数列。

定义 2.13：数列的递归定义

若数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$满足以下两个条件，则称该定义为数列的递归定义：

初始条件：给定数列的前 k 项 $a_1, a_2,\dots, a_k$ 的具体取值（k 为正整数，递推关系的阶数）

递推关系：存在一个确定的映射 f，使得当 $n>k$ 时，第 n 项 a_n 可由其前面的 k 项唯一确定，即$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k})$。

例 2.15: 无穷递缩等比数列

中国古代数学典籍中蕴含了丰富的数列知识，其中不少数列天然适合用递归定义来刻画，《庄子.天下篇》中，“一尺之棰，日取其半，万世不竭”就是典型的递减等比数列, 是探讨有限与无限的辩证关系的哲学命题。

递归定义：

①初始条件：$a_1=1$（初始棰长为 1 尺）；

②递推关系：$a_n = a_{n-1} \times \frac{1}{2}$ (n≥2) 。

例 2.16:循环神经网络隐藏状态序列 $\{h_t\}$ 的递归定义

设循环神经网络的隐藏状态序列为$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$（t 为时间步），其递归定义为：

①初始条件：初始隐藏状态 h_0 为模型随机初始化设定的常数向量，是递归的起点。

②递推关系：对于任意时间步 $t\geqslant1$，第 t 时刻的隐藏状态 h_t 由前一时刻的隐藏状态 h_{t-1}、当前时刻的输入 x_t 以及模型参数唯一确定，即$h_t = f(w \cdot h_{t-1} + U \cdot x_t + b)$，其中：

W 为隐藏层权重矩阵，U 为输入层到隐藏层的权重矩阵，b 为偏置向量，三者均为模型固定参数，$f(\cdot)$ 为激活函数（如 Sigmoid、Tanh、ReLU 等），用于引入非线性变换。

该序列是带有外部输入的递归数列，其递推过程依赖外部输入序列x_t。序列中的元素 h_t 通常为向量，是传统标量数列的推广，但其递归定义的核心逻辑（初始条件 + 递推关系）保持一致。

2.6.2 集合的递归定义

集合的递归定义也称为基础递归定义，它通过初始基例、归纳生成规则和封闭性约束这三组有限的规则，精确刻画无限集合元素构成的定义范式，是递归思想的最基础、最严格的形式。初始基例直接指定集合的初始元素，这是定义的起点，保证集合非空。归纳生成规则给定一组递推方法，通过已定义的元素构造新的元素，这是生成集合全部元素的核心。封闭性约束规定集合中的所有元素都只能通过初始基例和归纳生成规则生成，不存在额外元素，这是保证集合极小性与唯一性的关键，避免出现 “冗余元素”。

定义 2.14: 集合的递归定义

设 U 为全域集合，$S\subseteq U$ 为待定义集合，S 的广义递归定义由以下三部分构成：

初始基例：存在非空集合 $A\subseteq U$，使得 $A\subseteq S$（指定 S 的初始元素）。

归纳生成规则：给定有限个生成算子 $f_1,\dots,fm$，算子对 S 中元素作用的结果也属于 S（递推生成新元素）。

封闭性约束：$S=\cap\{T\subseteq U \mid A\subseteq T$ 且 T 对算子封闭$\}$（S 是满足前两条的最小集合，保证唯一性）。

生成算子提供了一套严格、可操作的元素生成规则，通过有限次重复应用算子，可以从初始元素出发，递归生成集合的所有后续元素。任意一个新元素都是对已有元素应用某一个算子得到的结果。极小性条款通过取所有满足条件的集合的交集，直接排除了这些多余的超集，只留下唯一的、不含冗余元素的 S。

候选集合 T 是符合递归基础条款和归纳条款的“备选集合”，存在多个。在全域 U 内，T 包含初始集合 A 并且对生成算子封闭。

集合的递归定义适合解决具有“层级生成特征”的集合刻画与应用问题，特别是列举法和描述法等传统集合定义方法受限场景。比如无限可数集合的精准定义问题，层级结构集合的一致性与确定性问题和集合性质的归纳证明支撑问题。

例 2.17：用递归定义刻画“所有合法二进制数集合”

①前置设定：全域 U：所有由数字 0、1 组成的有限字符串集合。

合法二进制数：首位不能为 0（除单个数字 0 外）。

②初始基例：存在初始集合 $A=\{0,1\}$，且 $A\subseteq S$。

③ 归纳生成规则：定义生成算子 f，对任意已有的合法二进制数 $x\in S$：

若 $x=0$，为避免首位为 0，对 $x=0$，不参与递推拓展；

若 $x=1$ 或 x 是首位为 1 的合法二进制数，则在 x 末尾追加 0 或 1，得到的新字符串 $x_0\in S$、$x1\in S$。

④封闭性约束：$S=\cap\{T\subseteq U \mid A\subseteq T$ 且 T 对上述生成算子封闭$\}$，封闭性约束排除了 00、010 这类非法字符串，进一步保证 S 中没有任何非法元素。

结论：S 是全体合法二进制数的集合

2.6.3 算术表达式的递归定义

算术表达式的递归定义与数列和集合的递归定义相似，所生成的新对象都由已知对象通过固定规则重复构造而成，体现了“用自身定义自身”的递归思想。

算术表达式的递归定义是形式化定义合法表达式结构的核心方法，广泛应用于数学逻辑、编译原理、AI 表达式生成等领域。算术表达式的递归定义除了遵循基础条件、递归组合规则和边界约束三元核心结构外，同时应具备“句法合法性”和“语义关联性”两大属性。

定义 2.15：算术表达式的递归定义

①前置设定：设算术表达式的集合为 E；符号集包含实数、变量、二元运算符 $(+,-,\times,\div)$、乘方运算符 $\uparrow$、括号 ( )；$\mathbb{Z}^+$ 表示正整数集合。

②初始基例：任何实数和变量都属于 E。

③递归组合规则：

-若 $f\in E$ 且 $g\in E$，则 $(f+g)$、$(f-g)$、$(f\times g)\in E$；

-若 $f\in E$ 且 $g\in E$ 且 $g=0$，则 $(f\div g)\in E$；

-若 $f\in E$ 且 $n\in\mathbb{Z}_+$，则 $(f\uparrow n)\in E$。

④边界约束：只有有限次使用初始基例和递归组合规则生成的符号串，才属于 E。

在递归定义的三个核心要素中，基础条件是起点，是无需递归推导的原始对象，是数列递归定义的初始项、集合递归定义的初始元素集合和算术表达式递归定义的原子表达式。递归步骤确定从已知对象生成新对象的“规则”。在数列递归定义中是项与项的递推关系，在集合递归定义中是元素的生成规则，在算术表达式递归定义中是表达式的组合规则。极小性条件确保没有额外无关对象被纳入。在数列递归定义中，新生成的数列由初始项和递推关系唯一确定，不会生成额外项，是天然满足极小性。集合递归定义中必须明确设定该极小性条件，使得目标集合是唯一满足基础条件和递归步骤的最小集合。算术表达式递归定义中同样要明确极小性条件，即只有通过有限次使用基础条件和递归步骤生成的符号串，才属于算术表达式集合。

扩展阅读

数学证明方法的核心作用

证明方法通过规范化的逻辑推理验证数学命题的真伪，承担着思维训练与问题转化的功能，可引人们跳出直觉判断，形成“前提—推理—结论”的抽象思维模式，将模糊的实际问题转化为形式化的数学模型，实现从复杂问题到可解场景的拆解。这些方法并非纯数学的抽象概念，而是连接理论与应用的纽带，是后续学习的核心工具。

证明方法与数学哲学流派

数学证明的本质是用逻辑手段确立命题的必然性，不同证明方法的合法性和有效性，均由数学哲学流派的核心观点支撑。以弗雷格和罗素为代表的逻辑主义认为证明的本质是逻辑演绎，是从公理出发通过逻辑规则推导结论。直接证明法、反证法、数学归纳法是其典型的方法。以布劳威尔代表的代表直觉主义认排斥非构造性证明，构造性证明、穷举法是其典型的方法。以希尔伯特为代表的形式主义认为证明是符号串的变形过程，与符号的直观意义无关，证明的有效性取决于形式规则的严格性。公理化证明、空证明 / 平凡证明是其对应的证明方法。数学证明方法的发展本质上反映了数学学科自身从直观经验走向严格逻辑、从单一演绎走向多元范式的演进历程，同时也映射了人类对 “数学真理” 的认知深化与哲学思辨的迭代。

数学证明方法可信性

我们之所以相信直接证明法、间接证明法、基于命题真值的直接判定方法和数学归纳法的证明结果，核心在于这些方法并非人为杜撰的技巧，而是植根于数理逻辑公理体系的合理延伸，是人类为确保数学命题在特定体系内“可证”且“保真”而构建的核心工具。从本质上看，这些方法是人类理性思维的规范化与形式化产物，回应了“如何在逻辑框架内可靠确认命题真值”这一核心哲学命题。它们的差异仅在于证明路径的选择，或正向推导、或迂回归谬、或机械判定、或递归延伸，但最终目标一致，即基于既定公理与逻辑规则，确认命题在该体系内是否具备“前提为真则结论必真”的保真性。需明确数学中的“真”是特定公理体系下的“形式真”，而非绝对“实质真”，证明结果的有效性也仅限于既定逻辑框架内。

知识扩展提示词

疑问句、祈使句、感叹句一般不表达命题的原因？

简单穷举、剪枝穷举（回溯法）和分治穷举方法的区别？

分情况证明法有哪些不同子情况，其对应的典型证明策略是什么？

如何区分命题逻辑上为真与命题有实际意义？

演绎证明方法的优缺点?

第 2 章主要数学符号列表

序号	符号	含义	示例
1	$\rightarrow$	命题蕴含连接词	$P\rightarrow Q$ (若 P，则 Q)
2	$\leftrightarrow$	命题等价连接词	$A\leftrightarrow B$（A 等价于 B）
3	$\neg$	命题否定联结词	¬P（读作 “非 P”）