目录

第 1 章 集合论

集合既是一种基本对象，也是一种方法论装置。集合最直观的功能是把分散的个体视为一个整体，让数学能够统一地定义、构造、比较与证明。集合本身不是“解题算法”，但它提供了一个极强的抽象框架,能够将复杂系统中的对象、约束、关系与不确定性组织成可计算、可优化、可验证的形式。资源配置与运筹优化、交通与城市治理、风险控制与安全、数据科学与机器学习等常见的复杂问题，几乎都能在某个层面被“集合化”，从而更容易建模与求解。

本章详细介绍了集合的大小和度量、集合的表示方法、子集与集合相等的概念。阐述了集合的基本运算与扩展运算、有穷和无穷集合的相关逻辑表达，以及集合运算的常见恒等式与推导方法。

1.1 集合的大小和度量

中国古代的集合思想偏向于经验性和实用性的归类，服务于哲学论证、逻辑推理和实际问题解决。《周易・系辞上传》中“方以类聚，物以群分，吉凶生矣”,强调了同类事物的整体性和异类事物的区分性，是古代归类思想的核心表述。《公孙龙子・白马论》中的“白马非马”，并非否定白马的“马属”本质，而是强调“白马”比“马”多了“白色”的属性限制，是范围更窄的范畴。虽然没有发展出公理化、系统化的理论体系，但在哲学思辨、逻辑推理和实际应用中，存在大量与集合思想相通的表述与应用。

ZFC（Zermelo–Fraenkel set theory with Choice）系统是现代集合论的主流基础，为数学提供了统一的语言框架，几乎所有数学对象（数、函数、向量、图形等）都可定义为集合，主流数学分支的绝大多数核心定理的推演，实现了数学基础的严格化与统一化。

本节主要说明集合中元素的数量特征，通过基数刻画集合的元素数量规模。

1.1.1 集合的定义与分类（有限 / 无限）

格奥尔格.康托尔（Georg Cantor） 给出了集合的初始定义：“一个集合就是我们的直观或思想中那些确定的、能区分的对象（它们称为集合的元素）汇集在一起，作为一个整体来考虑的结果”。这一定义是朴素集合论的核心基础，直观揭示了集合的 “确定性”“互异性” 等核心性质，为集合论成为独立数学分支奠定了基础。策梅洛 - 弗兰克尔公理系统（ZFC）并未对 “集合” 给出直接的直观定义，而是通过 “原始概念+公理约束” 的形式化框架刻画“集合”这一数学对象。

定义 1.1: 集合

集合是由确定的、互不相同的对象汇集而成的无序整体，这些对象称为集合的元素。对于任何对象 x 和集合 A，要么 x 属于 A，要么 x 不属于 A，二者必居其一且仅居其一。

$x \in A$：x 是 A 的元素（x 属于 A）。

$x \notin A$：x 不是 A 的元素（x 不属于 A）。

有限集：元素个数有限的集合。

无限集：元素个数无限的集合。

1）集合的核心属性

集合是“由我们的直观或思想中确定的、可区分的对象汇集而成的整体”。集合的核心属性为确定性（任一对象是否属于集合是明确的，无模糊性）、互异性（集合中的元素不重复）、无序性（集合中元素的排列顺序不影响集合本身），这是集合本质属性的抽象概括（内涵）。

集合按元素数量维度可划分为有限集合（如空集、单元集、二元集合等）、无限集合（如自然数集、整数集、实数集等）。按元素类型维度可划分为具体对象集合（元素为实物、数字等具体事物），集合族（元素为集合）和抽象对象集合（元素为函数、关系、向量等抽象数学概念）。

2）集合元素的核心属性

集合元素的核心属性围绕“与集合的从属关系”展开。可区分性说明元素之间互不相同，确定性说明任一对象应明确是否为某集合的元素。集合元素可以是直观具体对象，如数字、实物、符号等。也可以是抽象数学对象，如函数、关系、向量、矩阵、线性变换等。

1.1.2 集合的基数

基数是对“集合大小” 这一属性的进一步拆解。对于有限集，基数就是集合中元素的个数。对于无限集，基数是集合之间的等势关系。等势与“元素个数相等”是同一概念，有限集的等势即元素个数相等，无限集的等势即元素间可建立一一对应关系。若两个集合之间的元素是一一配对，则它们的基数相等。例如自然数集 $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$ 和正偶数集 $2\mathbb{N}^{+}=\{2,4,6,8,\ldots\}$ 等势，其基数相同。通常我们采用$|A|$标记集合 A 中元素的个数。

定义 1.2: 集合的基数

集合的基数 $|A|$：集合 A 中元素的个数。

k 元集：含有 k 个元素的集合，其中 $k \geqslant 0$。

集合的基数是连接“有限集合”与“自然数”的桥梁，每个有限集都唯一对应一个自然数 k，这个 k 就是它的基数，此时该集合也称为 k 元集。

k 元集为有限集提供了统一的标准化模型，使集合的基数成为可精确定义、可计算与可比较的数学概念，是离散数学与组合数学的理论基石。

无限集合的“大小”无法用描述有限集合的自然数来衡量。数学家康托尔（Cantor）提出的超限基数是专门用来描述无限集合基数的工具。超限基数大于每一个自然数，但它并不是普通意义上的无穷大数，而是刻画无限集合不同大小层级的严格数学概念。

1.2 集合的表示

1.2.1 列举法（枚举法）

列举法是集合论中最直观的集合表示方法，是将集合的所有元素逐一列出，并用大括号 { } 包裹，元素之间用逗号分隔。其标准形式为：

$S=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$，其中 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ 是集合 S 的全部元素。

无限集的列举表示需体现元素的排列规律，以省略号延续规律，该方法仅适用于可数无限集。不可数无限集（如实数集 $\mathbb{R}$）无法通过列举法准确表达。

列举法是直观简化写法，列举法是直观的简化表示方法，仅能展示集合的具体元素，无法描述元素的共同特征。对类似“所有素数的集合” 这种规律不明确的可数集和“实数集 $\mathbb{R}$” 这种不可数无限集，无法用列举法准确表达。

1.2.2 描述法（叙述法）

描述法是用元素的共同特征来表示集合的一种数学方法，核心是明确集合中元素的类型，以及元素需要满足的条件。

描述法的基本格式为$\{x\in$ 取值范围$|P(x)\}$ （或 $\{x \in$ 取值范围 $: P(x)\}$），其中 x 代表集合中的任意一个元素，取值范围明确元素类型（如 $x\in\mathbb{R}$ 表示 x 是实数）。“|”读作“使得”，$P(x)$表示元素 x 需要满足的条件。

例 1.1： 集合的描述法示例

数集示例: 所有偶数组成的集合:$\{ x\in \mathbb{Z} \mid x =2k, k\in\mathbb{Z}\}$

当元素的论域（全集）确定时，可通过“不属于”符号∉定义集合。如：

设实数集 $\mathbb{R}$，整数集 $\mathbb{Z}$，则 $C=\{x \mid x\in\mathbb{R}\wedge x>0\wedge x\notin\mathbb{Z}\}$ 为所有大于 0 且不属于整数集的实数。

点集示例: 平面直角坐标系中，直线 $y=x+1$ 上的所有点组成的集合:$\{(x,y) \mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, y=x+1\}$

特殊集合示例：方程 $x^2-4=0$ 的所有解组成的集合:$\{x \mid x^2-4=0\}$

列举法和描述法所表示的集合都必须遵守集合的核心内涵，也就是集合中的元素互不相同并且无序。描述法用元素的共同特征简洁高效表示有限集和无限集，可方便后续的集合运算和逻辑推导。若属性条件表述不严谨，会导致集合的元素范围模糊，因此使用描述法时需准确标注元素类型和约束条件，格式错误会直接导致集合表示无效。

例 1.2：不精准的集合描述

(1)条件模糊：$\{y \mid y$ 是好看的颜色$\}$ （“好看” 无统一判定标准）

(2)范围不清：$\{b \mid b$ 是班里个子高的同学$\}$ （“个子高” 无明确范围界定）

(3)条件矛盾：$\{n \mid n$ 是既是奇数又是偶数的整数$\}$ （奇数与偶数属性相互冲突）

(4) 多条件模糊叠加：$\{x \mid x$ 是城市中行驶的、速度较快的、适合通勤的新能源汽车$\}$（“速度较快”“城市中行驶” 均无量化标准, 多条件叠加，没有统一的逻辑判定标准，完全无法明确集合的元素范围）。

1.2.3 常用基础数集

常用基础数集大部分可在 ZFC 公理的框架下被严格定义和构造，从而保证这些常用集合的合法性与一致性。

基础数集主要包括：

自然数集（本文约定包含 0）$\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

整数集 $\mathbb{Z}=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

有理数集 $\mathbb{Q}=\{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}$ 且 $b \neq 0\}$

实数集 $\mathbb{R}=\{x \mid x$ 为实数$\}$

复数集 $\mathbb{C}=\{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2=-1\}$

无理数集 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}=\{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$（示例：$\sqrt{2}, \pi$ 等）。

常用基础数集依托公理化体系的严格支撑、长期学术实践的共识沉淀及跨学科应用的普适验证，成为数学学科乃至整个科学领域的基础核心对象。在此基础上扩展出的向量空间、矩阵集合等扩展的数集进一步延续了基础数集的权威属性。

基础数集从离散到连续、从实数到复数，逐步扩展数的范围，满足不同场景的运算需求，建立了数的层级体系，保证特定数据集内运算的封闭性，为各类学科提供统一的量化语言，实现了实际问题到数学问题的转化，便于分析与求解。

1.3 集合间的关系与特殊集合

集合间的关系刻画了不同集合在元素构成上的关联与逻辑规则，它以元素是否属于另一个集合为判定依据，用来明确集合之间的包含、相等、互斥等逻辑关系。这种判定方法只以元素的归属为唯一标准，与集合的名称、表示形式等外在特征无关。不同集合在元素构成上的关联关系主要有包含关系（含集合相等）和不相交关系（相离关系）。

1.3.1 集合的包含与相等

子集和真子集是包含关系的核心，二者均依据“一个集合的元素是否全部属于另一个集合”判定，真子集还需满足“两个集合不相等”的额外条件。

定义 1.3:子集与真子集

子集（包含关系）**:** $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$

A 是 B 的子集，当且仅当对任意 x，若 $x \in A$，则有 $x \in B$。

真子集（严格子集）**:** $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$ 。

A 是 B 的真子集，当且仅当 A 是 B 的子集且存在元素 $x \in B$ 使得 $x \notin A$。

定义 1.4: 集合相等

集合 A 与集合 B 相等**:**　$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

集合相等的本质是两个集合的元素完全相同，该关系与集合的表示形式、命名无关

若集合 A 与 B 满足 $A \cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 为不相交集合（也称相离关系），即二者没有任何公共元素。

集合间的包含关系判定依据为一个集合的元素是否全部属于另一个集合，该关系体现了集合之间的层级从属关系。相等关系要求两个集合元素完全相同，是包含关系的双向特例。集合间的不相交关系则看两个集合是否有公共元素，体现的是集合之间的互斥性。

1.3.2 空集与全集

空集（∅）是集合的特殊情形，是不含任何元素的集合，作为“最小集合”，它是所有集合的子集，也是判定子集关系、构建集合层级的底层基准。

定义 1.5: 空集

空集 ∅：不含任何元素的集合。

公理集合论体系 ZFC 通过公理保证了空集（∅）的存在性与唯一性。

定理 1.1 空集子集定理

空集是任意集合的子集。即对任意集合 A，都有$\varnothing\subseteq A$。

证明：采用反证法

① 假设结论不成立，即存在某个集合 A，使得 $\varnothing\nsubseteq A$；

② 根据子集的定义，这意味着存在元素 x，使得 $x\in\varnothing$ 且 $x\notin A$；

③ 由空集的定义（∅ 不含任何元素），可知“$x\in\varnothing$”为假命题；

④ 结合步骤②的“$x\in\varnothing$ 且 $x\notin A$”，根据合取命题“一假则假”的规则，该命题矛盾；

⑤ 故假设不成立，原命题成立。

定理 1.2：空集唯一性定理

空集是唯一的。

证明：设 $\varnothing_1$ 和 $\varnothing_2$ 都是空集。

由空集子集定理：空集是任意集合的子集，因此 $\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$；

同理，$\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$。

根据集合相等定义：若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$。因此 $\varnothing_1=\varnothing_2$。

故空集唯一。

引入空集子集定理与空集唯一性定理，旨在让集合论的基础概念脱离直观经验，走向严格公理化。空集唯一性定理解决了“特殊集合的存在与唯一性”问题，空集子集定理解决了“特殊集合与普通集合的关系”问题，是集合论后续扩展的逻辑基础。

为保证集合运算的范围可控，引入全集这一“最大集合”，特定研究语境下所有讨论的集合都是该全集的子集。

定义 1.6:全集 ***E***

如果在一个问题中所讨论的所有集合都是集合 E 的子集，即对任意集合 A，都有 $A\subseteq E$，则称 E 为全集。

全集是特定研究语境下的论域，包含该语境中所有讨论对象，也是补集运算的必要支撑前提。对任意被研究集合 A，都有 $A\subseteq E$。在集合运算、集合恒等式证明、命题逻辑与谓词逻辑、关系代数与数据库理论和格论中都会涉及到全集的概念。

1.4 集合运算

集合运算提供了一套严格、统一的工具，用以描述对象的归属关系、分类规则和逻辑关联。集合运算基于 ZFC 公理化规则，通过定义规则与运算性质规则对集合进行拆分或合并，解决实际问题中的分类与筛选需求。

集合运算可分为基本集合运算和派生集合运算两大类，基本运算是集合论的核心基础，派生运算可由基本运算推导得出。

1.4.1 集合基本运算

1）并集运算（Union）∪

并集运算（Union，运算符∪）针对两个及以上集合，包含 “合并” 与 “去重” 两个核心操作。其核心是将多个集合的所有元素整合为一个新集合，且新集合中不包含重复元素。运算符为∪，标准数学定义为：$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$。

例如：若第一轮选课集为 A={高等数学,大学英语,Python 程序设计}，第二轮选课集为 B={Python 程序设计,数据结构,人工智能导论}，则 $A \cup B$={高等数学,大学英语,Python 程序设计,数据结构,人工智能导论}。$A \cup B$ 的运算结果合并了集合 A 和 B 中的所有元素并完成了去重。

2）交集运算（Intersection）∩

多个集合的交集运算聚焦于 “元素的公共性” ，只有同时属于所有参与运算集合的元素，才属于交集。交集运算符为∩，标准数学定义为：$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$。

集合交集运算在筛选公共元素时隐含两个步骤：一是逐一验证元素的归属关系，二是对运算结果进行空集判定。若集合之间没有公共元素，其交集为空集（∅），空集判定保证了交集运算的完整性。

3）绝对补运算（Absolute complement）~

绝对补集运算的本质是以全集 E 为边界，对集合 A 进行反向筛选。 筛选出全集 E 中不属于 A 的所有元素。简易运算符为~，标准数学定义为：$\sim A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A \}$。

例 1.3：AI 情感分析任务的全部特征集合 E 包含与文本词相关的特征值，即 E={词频,词性,情感词,长度,标点,停用词,句法,实体,熵,相似度}，对情感分类贡献度高的核心特征集合 B ={词频,情感词,停用词,相似度}，($B \subseteq E$)。为降低模型复杂度，可通过绝对补运算从全集 E 中剔除核心特征集合 B 之外的冗余特征。

$\sim B = \{x \mid x \in E \wedge x \notin B \}$={词性,长度,标点,句法,实体,熵}

集合的基本运算是不可拆解的独立运算，扩展运算均可拆解为基本运算的组合，是基于底层逻辑拓展的上层运算形式。

1.4.2 集合扩展运算

集合扩展运算弥补了基本运算的功能局限，能够满足更复杂的集合关系刻画与实际问题建模需求，从而构建起一套从基础到复杂的完整集合运算体系。

1）相对补运算

相对补集（集合差）精准刻画属于一个集合但不属于另一个集合的元素关系。该运算不依赖包含全部元素的全集，解决了 “属于某一集合但不属于另一集合” 的元素灵活筛选问题。

相对补运算的运算符为−，标准数学定义为：$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$。

例如：训练集 A 是 “全部标注样本”，集合 B 是 “噪声样本”，$A-B$ 就是完成了局部数据清洗的“纯净训练样本”。

相对补集可通过“绝对补集＋交集” 定义，即（$A-B=\cap\sim B$），绝对补集也可通过相对补集定义，即（~A= $E-A$）。

2）对称差集

对称差集是由所有属于 A 或属于 B，但不同时属于 A 和 B 的元素组成的集合。可直接描述两个集合的“非重叠部分”。运算符为⊕，形式化定义为：

逻辑表达式（描述法）：$A\oplus B=\{x\mid(x\in A\vee x\in B)\wedge\neg(x\in A\wedge x\in B)\}$

等价形式定义：$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$。

对称差集可直接剥离并集中的公共部分，精准定位两个集合的互异元素。

例如：设 A 为“上季度用户列表”，B 为“本季度用户列表”，$A\oplus B$ 直接得到“新增用户＋流失用户” 的集合，无需分别计算两个方向的差集。

3）幂集

幂集由集合 A 的所有子集构成的集合，包括空集 ∅ 和 A 本身。用于子集枚举、组合计数、概率空间定义等场景。描述符号为 $P(A)$ 或 2^A 。形式化定义为：

$P(A)=\{X\mid X\subseteq A\}$ ，其中符号 ⊆ 表示“子集关系”，即 X 是 A 的子集。

若集合 A 是有限集，且元素个数（基数）为 $|A|=n$，则其幂集的基数为 $|P(A)|=2^n$ 。当 A 是空集 ∅ 时， $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$， $|P(\varnothing)|=2^0=1$。

幂集是刻画 “子集全体” 这一概念的工具，揭示了集合的基数与子集数量的定量关系，以及集合与子集之间的层级结构。幂集的定义等价于 “对集合 A 中元素的所有可能的选择组合”， A 中的每个元素都有 “选入子集” 或 “不选入子集” 两种选择，所有选择的组合恰好构成幂集的全部元素。这种“二值选择” 的逻辑，是幂集与二进制、布尔代数、函数空间等概念关联的基础。

幂集的重要性质可归纳为：①对任意集合 A，$\varnothing\in P(A)$ 且 $A\in P(A)$；②若 $A\subseteq B$，则 $P(A)\subseteq P(B)$；③幂集 $P(A)$ 关于并、交、补运算构成一个布尔代数，这是集合代数的核心数学模型。

例 1.4：物流风控排查

设物流节点集合 $W=\{$出库=1, 配送=2, 签收=3$\}$，每个节点有已完成=1 和未完成=0 两种状态。为了物流风控排查，需要完整覆盖全流程可能状态的集合。

(1) 物流节点幂集 $P(W)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$

(2) 按出库、配送、签收顺序将子集映射为物流状态，将子集内的物流节点状态设为 1，未包含在子集内的物流节点状态设为 0。生成物流状态编码全集 T={(0,0,0)全未完成, (1,0,0)仅出库完成, (0,1,0)仅配送完成,(0,0,1)仅签收完成, (1,0,1)出库＋签收完成, (1,1,0)出库＋配送完成, (0,1,1)配送＋签收完成,(1,1,1)全部完成}。

(3) 物流业务中满足①配送完成 → 出库必完成；②签收完成 → 配送必完成两个约束的状态为正常状态集合。$T_{正常}$={(0,0,0)全未完成, (1,0,0)仅出库完成, (1,1,0)出库＋配送完成, (1,1,1)全部完成}。

(4) $T_{异常}=T-T_{正常}$

该方法可将物流业务约束转化为显性的数学模型（集合运算、状态编码），异常状态可自动触发预警，推送给风控或运营人员，降低货物丢失、错发的风险，减少客户投诉带来的成本损失。

4）笛卡尔积

笛卡尔积用于描述多个集合中元素的所有可能有序组合，其核心是有序和全覆盖。是构建多元状态空间、关系模型的基础工具。其定义如下：

集合 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2,\ldots, \boldsymbol{A}_n$ 的笛卡尔积是所有有序 n 元组的集合：

$\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_1\times\cdots\times \boldsymbol{A}_n=\{(a_1, a_2,\ldots, a_n) \mid a_{\mathrm{i}}\in A_i\}$

针对例 1.4，我们可以设出库、配送、签收 3 个节点对应的状态集合为 $S_{\text{出库}}$={0=未完成,1=已完成}，$S_{\text{配送}}$={0=未完成,1=已完成}，$S_{\text{签收}}$={0=未完成,1=已完成}，则全状态集合 T 就是 3 个集合的笛卡尔积：

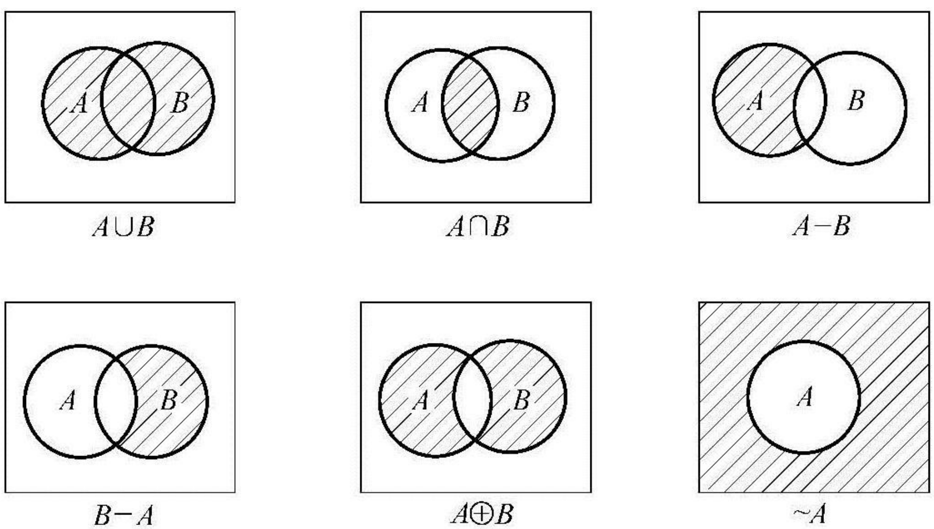
$T= S_{\text{出库}} \times S_{\text{配送}} \times S_{\text{签收}}=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in \{0,1\}\}$

笛卡尔积的结果是有序对（有序 n 元组），元素的顺序对应原集合的顺序一致，顺序不同则代表不同的的有序 n 元组。笛卡尔积包含第一个集合的每个元素与第二个集合的每个元素的组合，是全覆盖。参与笛卡尔积的各集合元素相互独立，无需预先存在关联。

1.4.3 集合运算图示方法

集合运算图示方法将抽象的集合关系与运算转化为直观的图形语言，该方法是验证集合恒等式的直观工具，也是符号逻辑与图形认知之间的桥梁。

文氏图（Venn）用封闭曲线（通常是圆形或椭圆形）表示集合，在全集范围内，曲线的重叠区域表示集合的交集，曲线覆盖的全部区域表示并集，曲线外的区域表示补集。



在计算机可视化条件下，集合运算的图示被进一步转化为矩阵热力图、流程图等形式。矩阵热力图用二维矩阵的单元格表示集合元素的归属关系，以颜色区分运算结果（如正常、异常状态）。流程图用节点和箭头表示集合运算的先后执行顺序（如先求幂集，再求差集）。

1.5 集合运算基本定律

集合运算基本定律是描述集合基本运算内在规律的恒真命题，是对集合运算本质属性的抽象概括，是将抽象公理转化为可操作的运算规则。其目标是为集合运算复合表达式的化简和集合关系的证明提供严谨且普适的逻辑工具。

1.5.1 运算不变性定律-交换律与结合律

交换律与结合律属于运算不变性定律，其本质是集合运算的结果与集合的运算顺序、分组方式无关。定律保证了运算的一致性，适用于并、交两种核心基本运算。

交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$，说明有限集合的并、交运算结果与分组方式无关。

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，说明并、交运算结果与分组方式无关。

1.5.2 运算简化冗余定律-幂等律、吸收律、差集转换律

运算简化冗余定律主要用于消除重复运算、嵌套运算的冗余，压缩集合复合表达式的复杂度。幂等律、吸收律和差集转换律是其主要定律，可实现复合表达式的简化。

幂等律：$A\cup A=A, A\cap A=A$, 可消除同一集合的重复并、交运算，简化集合表达式。

吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$，可消除并、交嵌套运算的冗余，简化集合复合表达式。

差集转换律：$A-B=A\cap\sim B$，将差运算转化为交补运算，统一运算形式，便于后续推导。

1.5.3 补运算对偶性定律

该类定律刻画补运算与并、交运算之间的对偶关系，即运算之间存在“互换后仍保持规律不变”的对偶对应关系，是集合运算复合表达式化简的核心。所有定律均包含补运算符号，且满足“对偶变换法则”，将并与交互换、空集与全集互换，补运算符号保持不变，定律依然成立。是处理含补集的集合表达式的关键依据。该类定律主要有德摩根律、双重否定律、排中律、矛盾律、全集 / 空集补集律等。

二元德摩根律：$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$，$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$，实现补运算与并、交运算的对偶转换。

双重否定律：$\sim(\sim A)=A$，补集的逆运算规则，可消除重复补运算。

排中律：$A\cup\sim A=E$，即集合 A 与其补集的并集为全集 E，覆盖论域内所有元素。

矛盾律：$A\cap\sim A=\varnothing$，集合 A 与其补集的交集为空集。

全集 / 空集补集律：$\sim E=\varnothing$，$\sim\varnothing=E$，体现全集与空集的互补关系。

1.5.4 扩展运算推广定律

该类定律聚焦基础运算向扩展运算的延伸，是完善集合代数运算体系的重要补充。幂集运算律建立了幂集基本运算规则，笛卡尔积分配律给出了笛卡尔积对并 / 交运算的分配规则，有限并 / 交德摩根律将德摩根律推广到有限多个集合。

幂集运算律：$P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$，$P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$，建立幂集的基本运算规则，揭示幂集与原集合运算的关联。

笛卡尔积分配律：$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$，$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$，给出笛卡尔积对并、交运算的分配规则。

有限并 / 交德摩根律：$\sim(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\bigcap_{i=1}^{n}\sim A_i$ ，$\sim(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}\sim A_i$ ，将德摩根律推广到有限多个集合。

1.5.5 集合运算复合表达式

集合运算的复合表达式是由基本运算或扩展运算组合而成的式子，可精准描述复杂的集合关系，经集合运算定律和恒等式简化后，能快速判断两个集合的相等或包含关系。运算优先级和封闭性是集合复合表达式构建与运算的核心原则，能够保证表达式的正确解读和计算结果的唯一性。

集合运算优先级从高到低依次为：

（1）括号优先：括号内的运算优先执行，多层括号从内向外依次计算；

（2）高阶扩展运算优先：幂集运算（P）> 笛卡尔积运算（×）；

（3）补集运算次之：~ 的计算优先级高于并、交、差；

（4）交运算优先于并、差、对称差：∩ 先于 ∪、−、⊕ 执行；

（5）同级运算从左到右依次计算：差（−）、对称差（⊕）为同级运算，优先级高于并（∪）；并（∪）单独为一级，按从左到右顺序计算。

例如：表达式 $P(A\cap B)\cup\sim C-D$ 的运算顺序为：①$A\cap B$；②$P(A\cap B)$；③$\sim C$；④$-D$；⑤∪。

1.6 集合常见恒等式

1.5 节按照功能、运算对象属性及逻辑层级关系将集合运算定律归纳为运算不变性定律、运算简化冗余定律、补运算对偶性定律和扩展运算推广定律四大类，构建了一套条理清晰、便于推导与应用的集合代数知识体系。

集合运算的定律具有普适性的规则或原理，是集合运算的基本性质，是推导其他结论的依据。定律通常以恒等式形式呈现，也包含非等式表述的性质（如包含关系的传递性）。为将集合运算的定性规则转化为理论研究和工程应用中的可操作工具，集合论中用符号化的恒等式呈现集合关系，让抽象的集合性质实现符号化操作与验证。并非所有恒等式都是定律，部分恒等式是由定律推导的推论。本节列出的常用恒等式可作为集合关系分析、表达式处理和定理证明的标准工具，直接参与集合代数演算。

1.6.1 运算不变性规则

1）基础定律

基础定律是针对并、交基础运算的核心定律（公理），无需依赖其他定律即可成立。是整个规则体系的本原依据。

(1) 结合律: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(2) 交换律: $A\cup B=B\cup A$,　$A\cap B=B\cap A$

证明 1.1： $A\cup B=B\cup A$

证：需要证明 $A\cup B\subseteq B\cup A$ 和 $B\cup A\subseteq A\cup B$ 都成立

①对于任意 x，$x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$；
②由交换律的逻辑性质，$x \in B$ 或 $x \in A$，故 $x\in B\cup A$
③因此 $A\cup B\subseteq B\cup A$。
同理，我们可以证明 $B\cup A\subseteq A\cup B$。

2）扩展定律

扩展定律由基础定律推导而来，以具体的恒等式形式呈现。

(3) 分配律: $A \cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

分配律实现并、交运算的交叉分配，简化复合表达式

证明 1.2： $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

证：只需要证明 $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$ 且 $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$。

对 $\forall x$，$x\in A\cup(B\cap C)$

$\Rightarrow x\in A$ 或 $(x\in B$ 且 $x\in C)$

$\Rightarrow(x\in A$ 或 $x\in B)$ 且 $(x\in A$ 或 $x\in C)$

$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

可得 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

同理可证 $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$。

1.6.2 冗余简化规则

1）冗余简化基础规则

基础规则是围绕并、交基础运算的底层化简规则，可直接用于消除运算冗余，属于本原规则。

(1) 同一律: $A\cup\varnothing=A,\ A\cap E=A$

证明 1.3： $A\cap E=A$

证：只需证明 $A\subseteq A\cap E$ 和 $A\cap E\subseteq A$

根据定义有 $A\cap E\subseteq A$；

对于 $\forall x$，$x\in A$,根据全集定义则有 $x\in E$；

$x\in A$ 且 $x\in E\Rightarrow x\in A\cap E$；

因此 $A\subseteq A\cap E$ 成立。

同理可证 $A\cap E\subseteq A$。

(2) 零律：$A\cup E=E,\ A\cap\varnothing=\varnothing$

在并集运算中，全集 E 是并运算的幺元。运算结果会固定为全集 E 这个特殊元素本身，不再受其他元素的影响。

证明 1.4： $A\cup E=E$

证：

由并集的定义，$E\subseteq A\cup E$；

由全集的定义，A 中的所有元素都属于 E，故 $A\cup E\subseteq E$，

综上 $A\cup E=E$。

(3) 幂等律: $A \cup A=A, A \cap A=A$

(4) 吸收律: $A\cup (A \cap B)=A,\quad A \cap (A\cup B)=A$

证明 1.5： $A \cup (A\cap B)=A$

证: $A \cup (A \cap B)$

$= (A \cap E) \cup (A \cap B)$ (同一律)

$= A \cap (E \cup B)$ (分配律)

$= A \cap (B \cup E)$ (交换律)

$= A \cap E$ (排中律)

$= A$ (同一律)

2）冗余简化扩展规则

扩展规则是基础定律的延伸，可用于集合关系的化简与判定，突出推导性与应用性。

(5) 并集包含性: $A\subseteq A \cup B$, $B\subseteq A \cup B$ ，并集包含性说明任意集合都是其与其他集合并集的子集。

(6) 交集包含性: $A \cap B\subseteq \mathrm{A}$, $A \cap B\subseteq B$ ，交集包含性说明任意两个集合的交集是每个集合的子集。

(7) 差集包含性: $A\text{-}B \subseteq A$，差集包含性说明集合与其子集的差集仍为原集合的子集。

1.6.3 补运算对偶性规则

1）基础定律

基础定律直接针对补运算的核心性质，其中排中律、矛盾律为公理级定律，补余律、双重否定律可由基础公理推导得出，二者共同构成补运算的理论基础。

(1) 排中律: $A \cup {\sim}A=E$ ，排中律即集合 A 与其补集的并集为全集，覆盖论域内所有元素。

(2) 矛盾律: $A \cap {\sim}A= \varnothing$，矛盾律即集合 A 与其补集的交集为空集，无公共元素。

(3) 补余律: ${\sim}\varnothing=E,\quad {\sim}E=\varnothing$，补余律体现空集与全集的互补关系。

(4) 双重否定律: ${\sim}{\sim}A=A$ ，双重否定律即补集的逆运算规则，可消除重复补运算。

(5) 补集与交集转换律: $A\text{-}B= A\cap{\sim}B$，补集与交集转换律将差运算转化为交补运算，统一运算形式。

2）扩展定律

扩展定律由基础定律推导得出，依赖基础规则的正确性，可用于复杂集合运算的化简和相关数学问题的证明。

(6) 德・摩根律(De Morgan’s Laws):

绝对形式: ${\sim}(B\cup C)= {\sim} B \cap {\sim}C,\quad {\sim}(B\cap C)= {\sim}B\cup {\sim}C$

相对形式: $A-(B\cup C)=(A-B) \cap (A-C)$, $A-(B \cap C)=(A-B)\cup (A-C)$

德・摩根律实现补运算与并、交、差运算的对偶转换。

1.6.4 集合复合运算扩展恒等式

(1)集合差运算的结合恒等式: $(A - B) - C= (A - C) - (B - C)$

证明 1.6： $(A - B) - C= (A - C) - (B - C)$

证:

$(A-C)-(B-C)$

$=(A\cap \sim C)\cap \sim(B\cap \sim C)$ (补集交集转换)

$=(A\cap \sim C)\cap(\sim B\cup \sim\sim C)$ (德摩根定律)

$=(A\cap \sim C)\cap(\sim B\cup C)$ (双重否定律)

$=(A\cap \sim C\cap \sim B)\cup(A\cap \sim C\cap C)$ (分配律)

$=(A\cap \sim C\cap \sim B)\cup(A\cap\varnothing)$ (矛盾律)

$=A\cap \sim C\cap \sim B$ (零律，同一律)

$=(A\cap \sim B)\cap \sim C$ ((交换律，结合律)

$=(A-B)-C$ (补集交集转换定律)

(2) 对称差 - 并集分配恒等式： $(A\cup B)\oplus(A\cup C)=(B\oplus C)-A$

证明 1.7： $(A\cup B)\oplus(A\cup C)$

$=((A\cup B)-(A\cup C))\cup((A\cup C)-(A\cup B))$

$=((A\cup B)\cap \sim A\cap \sim C)\cup((A\cup C)\cap \sim A\cap \sim B)$

$=(B\cap \sim A\cap \sim C)\cup(C\cap \sim A\cap \sim B)$

$=((B\cap \sim C)\cup(C\cap \sim B))\cap \sim A$

$=((B-C)\cup(C-B))\cap \sim A$

$=(B\oplus C)-A$

(3) 差集与补集交集的等价式: $A-B=A\cap\sim B$

(4) 集合包含的充要条件等价链: $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\varnothing$

(5) 对称差的消去律: $A\oplus B=A\oplus C\Leftrightarrow B=C$

(6) 对称差交换律: $A\oplus B=B\oplus A$

(7)对称差结合律**：** $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

(8)交集对对称差的分配律: $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

(9) 对称差与空集 / 全集的运算律**：** $A\oplus\varnothing=A$, $A\oplus E=\sim A$

(10) 对称差自反 / 补集运算律**：** $A\oplus A=\varnothing$, $A\oplus\sim A=E$

注意：有限集合的并集运算∪不满足对对称差运算⊕的分配律。例如反例：

$A=\{a,b,c\}$, $B=\{b,c,d\}$, $C=\{c,d,e\}$

$A\cup(B\oplus C)=\{a,b,c\}\cup\{b,e\}=\{a,b,c,e\}$

$(A\cup B)\oplus(A\cup C)=\{a,b,c,d\}\oplus\{a,b,c,d,e\}=\{e\}$。

习题

1.1 判断 {1,2,3,2} 是否为集合，并说明理由。

1.2 多重集（也称作多重集合）与集合的核心区别是什么？

1.3 设集合 $A=\{a,b,c\}$,求 $P(A)$、$P(P(A))$的基数。

第 1 章主要数学符号列表

序号	符号	含义	示例
1	$\mathbb{N}$	自然数集（本文约定包含 0）	{0, 1, 2, 3, …}
2	$\mathbb{N}^+$	正整数集（自然数中去掉 0）	{1, 2, 3, …}

3	$\mathbb{Z}$	整数集	$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
4	$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	非负整数集	$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$
5	$\mathbb{Z}_{>0}$	正整数集（与 $\mathbb{N}^+$ 含义一致）	$\{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$
6	$\mathbb{Q}$	有理数集	$\{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}$ 且 $b \neq 0\}$
7	$\mathbb{R}$	实数集	$\{x \mid x$ 为实数$\}$
8	$\mathbb{R}_{>0}$	正实数集	$\{x\in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
9	$\mathbb{C}$	复数集	$\{a + b_i \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$
10	$\mathbb{P}$	素数集（大于 1 且仅有 1 和自身为正因数）	$\{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$
11	$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	无理数集	$\{x\in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$
12	$\varnothing$	空集	$\varnothing=\{\}$
13	$\in$	属于	若 x=1,A={1,2},则 1$\in A$
14	$\notin$	不属于	
15	$\mathcal{A}$	集合族	$\mathcal{A}=\{\{1,2\},\{3,4\},\varnothing\}$
16	$\mathcal{P}(A)$	幂集（Power Set）	
17	E	全集	
18	$\cup$	集合并运算	
19	$\cap$	集合交运算	